偏微分方程的数值解法

第一部分 边值问题

第一章 变分形式 Ritz-Galerkin方法

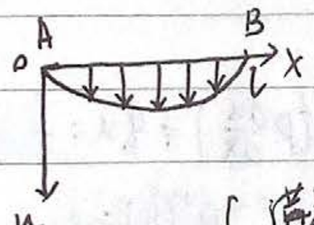
1.1 二次函数的极值

$J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ — 二次函数.

$$J(x_0) = \min_{x \in R^n} J(x) \xLeftrightarrow{A对称正定} Ax = b$$

1.2 两点边值问题

1.2.1 弦的平衡方



$$\begin{cases} -Tu'' = f(x), & 0 < x < l \\ u(0) = 0, & u(l) = 0 \end{cases}$$

$f(x)$ — 荷载　$u = u(x)$ — 挠度.

T — 弦张力

极小位能原理

满足边值条件 $u = u(x)$

$W_内 = \frac{1}{2}\int_0^l T \cdot (u')^2 dx$ — 应变能

$W_外 = -\int_0^l f \cdot u dx$ — 外力功

$J(u) = W_内 + W_外 = \frac{1}{2}\int_0^l (Tu'^2 - 2uf)dx$　(1.2.3)

$J(u_*) = \min_u J(u)$ — 变分问题

u的函数空间选取，对u, f限制.

1.2.2 Sobolev空间 $H^m(I)$

定义　1阶Sobolev空间 $H^1(I)$

$$H^1(I) = \{f \mid f \in L^2(I), f' \in L^2(I)\}$$

f'是f的广义导数

内积 $(f, g)_1 = \int_a^b (fg + f'g')dx$　范数 $\|f\|_1 = \sqrt{(f,f)_1} = [\int_a^b (f^2 + f'^2)dx]^{\frac{1}{2}}$

$L^2(I)$表示由定义在I上的平方可积的可测函数组成的空间

$I = (a, b)$　$\bar{I} = [a, b]$

变分法的基本引理 $f\in L^2(I)$，$\forall \varphi \in C_0^\infty(I)$，$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=0$ 则 $f(x)$ 几乎处处为0

前述变分问题描述为 $u_*\in H_0^1$，$J(u_*)=\min\limits_{u\in H_0^1} J(u)$

0表示齐次边值

令 $Lu=-T\frac{d^2u}{dx^2} \Rightarrow \begin{cases} -Tu''=Lu=f \\ u(0)=0 \quad u(l)=0 \end{cases}$

内积

与前述问题对应的二次泛函.

导出 $J(u)=\frac{1}{2}(Lu,u)-(f,u)$ | 二次函数 $J(x)=\frac{1}{2}(Ax,x)-(b,x)$

$a=(Lu,u)$

$H_0^1 \longleftrightarrow R^n$

$L \longleftrightarrow A$

$f \longleftrightarrow b$

对两点边值问题：

$$\bigstar\begin{cases} Lu=-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)+qu=f, & x\in(a,b) \\ u(a)=0 & u'(b)=0 \end{cases}$$

$u(a)=0$：强制边值条件 $u'(b)=0$：自然边值条件.

$p\in C^1(I)$ (一次连续可微空间)

$q\in C(I)$

令 $a(u,v)=\int_a^b \left(p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+quv\right)dx$

$\Downarrow$

$J(u)=\frac{1}{2}a(u,u)-(f,u)$

$C_0^\infty(I)$ 表示于 I 无穷次可微

定理：设 $f\in C(I)$，$u_*\in C^2$ 是上述边值问题的解.

$\Updownarrow$

$u_*\in C^2\cap H_E^1$ 使 $J(u_*)=\min\limits_{u\in H_E^1} J(u)$，$u_*$ 是边值问题的解.

放在物理上：极小位能原理.

二次连续可微解 u_*（古典解）

若外力为集中载荷，$u(x)$ 不二阶连续可导.（广义解）

1.2.4 虚功原理.

定理1.2.2.

设 $u\in C^2$, 则 u是边值问题~~的~~的解.

$$\Updownarrow$$

$u\in H_E^1$ 且满足变分方程 $a(u,v)-(f,v)=0$, 对 $\forall\ v\in H_E^1$

变分方程是允许非古典解. 一边值问题的广义解.

虚功原理比位能原理更具有一般性

定理1.2.3.

设 $u\in C^2$, 则 u满足

$$\begin{cases} Lu=-\dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{du}{dx}\right)+r\dfrac{du}{dx}+qu=f \\ u(a)=0\ ,\ u'(b)=0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$u\in C^2\cap H_E^1$ 且满足变分方程

$$a(u,v)-(f,v)=0\ ,\ 对\ \forall\ v\in H_E^1.$$

$$a(u,v)=\int_a^b\left[p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+r\frac{du}{dx}v+quv\right]dx$$

其中 $p\in C^1$, $p_{min}>0$, $r,q\in C$, $f\in L^2$

此时双线性形式 $a(u,v)$ 非对称正定, 除非 $r\equiv0$, $q\geq0$

1.3 二阶椭圆边值问题

$\int_G g\varphi\, dxdy = -\int_G f\frac{\partial\varphi}{\partial x}dxdy$

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = g$ 分部积分定义

1.3.1 Sobolev 空间 $H^m(G)$

$\overline{G}$ Γ G

$H^1(G)$

$H^1(G) = \{ f(x,y) \mid f, f_x, f_y \in L^2(G) \}$. f_x, f_y 为 f 的广义导数

内积：$(f,g)_1 = \int_G (fg + f_x g_x + f_y \cdot g_y)\, dxdy$

范数：$\|f\|_1 = \sqrt{(f,f)_1} = [\int_G (|f|^2 + |f_x|^2 + |f_y|^2)\, dxdy]^{\frac{1}{2}}$

1.3.2 极小位能原理

Poisson 方程的第一边值问题

$$(*) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x,y), & (x,y) \in G. \\ u|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

Δ 是 Laplace 算符 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

$\boxed{\text{Green 第一公式}}$ $\int_G(-\Delta u)v\, dxdy = \int_G (\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})dxdy - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\cdot v\, ds$

$a(u,v) = \int_G (\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})dxdy$

$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - (f,u)$

不同边值条件 J 的构造不同

定理 1.3.1

设 $u_* \in C^2(\overline{G})$ 是边值问题 $(*)$ 的解

$\Updownarrow$

$u_* \in C^2(\overline{G}) \cap H_0^1(G)$ 使 $J(u)$ 达到极小.

若 $u|_\Gamma = \varphi(x,y)$, $\varphi \in C^1(\Gamma)$

令 $v = u - u_0$ $u_0|_\Gamma = \varphi$. 则 v 满足齐次边界.

$\hat{J}(v) = J(u) + 常数$.

$\therefore$ 非齐次边值问题等价于齐次.

引进的主要目的是证明 $(*) \Leftrightarrow$ 求 $J(u_*) = \min J(u)$

这两问题等价

1.3.3 自然边值条件

考虑第二，第三边值条件.

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u\Big|_{\Gamma}=0,\quad \alpha\geq 0.$$

$$\boxed{a(u,v)=\iint_G\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]dxdy+\int_{\Gamma}\alpha uv\,ds}$$

定理 1.3.2.

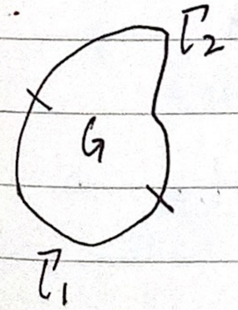
上述边值问题的解 u_*

$$\Updownarrow$$

$J(u_*)=\min\limits_{u\in H^1}J(u)$ —边值问题的广义解.

u_* 自动满足二，三边值条件.

1.3.4 虚功原理



$$u|_{\Gamma_1}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u\Big|_{\Gamma_2}=0$$

$$a(u,v)=\iint_G\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy+\int_{\Gamma}\alpha uv\,ds$$

$$a(u,v)-(f,v)=0.$$

对 $\forall v$ 满，u_* 要满足

1.3及之前 化边值问题为等价变分问题.

1.4 求解变分问题

1.4 Ritz-Galerkin方法.

Ritz-Galerkin方法的基本思想：有穷维空间近似代替无穷维空间

Ritz法：(极小位能原理) 设 U_n 是 U 的 n 维子空间.

$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 是 U_n 的一個基底.

任一元素 $u_n \in U_n$ $\quad u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$.

目标使 $J(u_n)$ 取极小.

$$J(u_n) = \frac{1}{2} a(u_n, u_n) - (f, u_n)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a(\varphi_i, \varphi_j) c_i c_j - \sum_{j=1}^{n} c_j (f, \varphi_j)$$

$a(u,v)$ 对称正定

令 $\frac{\partial J(u_n)}{\partial c_j} = 0$

满足 $\boxed{\sum_{i=1}^{n} a(\varphi_i, \varphi_j) c_i = (f, \varphi_j)}$

Galerkin法.

(虚功原理) $\quad a(u_n, v) = (f, v)$, 对 $\forall\ v \in U_n$

或(取 $v = \varphi_j$, $1 \le j \le n$)

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a(\varphi_i, \varphi_j) c_i = (f, \varphi_j)} \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

推广. U 中取两个 n 维子空间 $\quad U_n: \varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_n$
$V_n: \psi_1, \psi_2 \cdots \psi_n$.

使其满足 $a(u_n, v_n) = (f, v_n)$. 对 $\forall\ v_n \in V_n$

或 $\sum_{i=1}^{n} a(\varphi_i, \psi_j) c_i = (f, \psi_j)$

广义Galerkin

φ_i 满足边值条件

$u(a)=\alpha$ $\qquad$ $u'(b)=\beta$

注1.4.1 Ritz-Galerkin 方法用于非齐次边值问题.

① 非齐次自然边值问题：适当修改方程右端

② 非齐次本质边值条件：齐次化后再用Ritz-Galerkin方法.

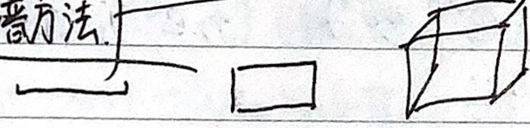
$$\sum_{i=1}^{n} a(\varphi_i,\varphi_j)c_i+\overset{②}{a(u_0,\varphi_j)}=(f,\varphi_j)+\overset{①}{p(b)\beta\varphi_j(b)}$$

基函数选取

有限元法出现以前，基函数通常选代数或三角多项式.

1.5 谱方法

针对规则区域：



周期边值条件：

Fourier谱方法，计算离散Fourier变换的快速算法——FFT算法.

1.5.1 三角函数逼近.

$$f_N(x)=\sum_{k=-N}^{N}\hat{f}(x)e^{ikx} \qquad f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ikx}$$

令

$$l_m(x)=\frac{1}{2N_k}\sum_{k=-N}^{N-1}e^{ik(x-x_m)} \qquad l_m(x_n)=\delta_{mn}=\begin{cases}1, & m=n,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

$$I_N f(x)=\sum_{m=1}^{2N} f(x_m)\,l_m(x)$$

1.5.2 Fourier谱方法.

$$\begin{cases}Lu\equiv -u''+\lambda u=f(x), & x\in(0,2\pi)\\ u(0)=u(2\pi)=0.\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

求 $u\in U$，使 $a(u,v)=(f,v)$ $\forall v\in U$

在Galerkin法中取子空间 $U_N=\mathrm{span}\{e^{ikx}\}_{k=-N}^{N}$，就导出所谓Fourier谱方法

例如，取基函数 $\varphi_k=e^{ikx}-1$，$k=\pm1$

1.5.3 拟谱方法(配置法)

设边界值问题为求 2π - 周期函数 u，满足

$$Lu=f$$

拟谱方法是$\underbrace{\text{选定节点组}\{x_j\}}_{\text{离散}}$，求 $u_N \in U_N$，使得 u_N 在 $\{x_j\}$ 上满足以上方程

(FFT)

计算形如 $(e^{ikx}, e^{ijx})_N$，$(f, e^{ijx})_N$ 的离散内积时，可采用快速 Fourier 变换算法

无限空间 $\xrightarrow{转化}$ 有限空间　取一组基函数 求系数.
(即:求解方程) 则,系数为节点值

第二章 有限元空间与椭圆型方程的有限元法

有限元法,实质上是 Ritz-Galerkin 法.

与传统的区别:提供了一种基函数选取方法.

应用样条函数方法提供了一种选取"局部基函数"或"分片多项式空间"的新技巧

有限元法的基本问题:

(1) 把问题转化成变分形式.

(2) 选定单元的形状,对求解域作剖分.(一维—小区间,二维—三角形或四边形)

(3) 构造基函数或单元形状函数 —— 有限元空间

(4) 形成有限元方程(Ritz—Galerkin方程)

(5) 提供有限元方程的有效解法

(6) 收敛性及误差估计.

2.1 两点边值问题的有限元法.

$$\begin{cases} Lu = -\dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{du}{dx}\right) + qu = f, & a<x<b, \\ u(a)=0, \quad u'(b)=0, \end{cases}$$

2.1.1 从 Ritz 法出发

网格剖分:$a = x_0 < x_1 < \cdots < \underbrace{x_{i-1}, < x_i}_{} < \cdots < x_n = b$

$I_i = [x_{i-1}, x_i]$ 第 i 个单元.

取子空间 U_h — 有限元空间,试探函数空间.

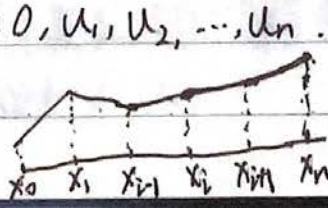
$\cdot\, u_h \in U_h$ — 试探函数.

u_h 在每一单元上,次数不超过整数 m. 全区间 $[a,b]$ 上属于 $H_E^1(I)$

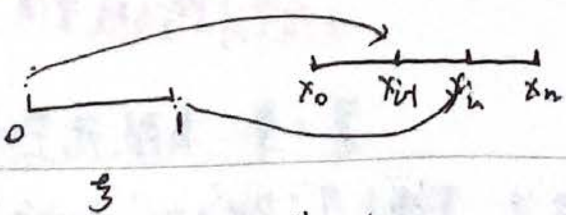
最简单的 U_h 由分段线性函数组成. 由节点上一组值. $u_0 = 0, u_1, u_2, \cdots, u_n$.

线性插值:$u_h(x) = \dfrac{x_i - x}{h_i} u_{i-1} + \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i} u_i \quad x \in I_i$

基函数. 系数



单元形状函数



仿射变换：

$$\xi = F_i(x) = \frac{x-x_{i-1}}{h_i}$$ 基函数 $N_0(\xi)=1-\xi \quad N_1(\xi)=\xi$

把 I_i 变到 ξ 轴上的参考单元 $[0,1]$. $\quad u_n(x) = N_0(\xi)u_{i-1}+N_1(\xi)u_i,\ x\in I_i$

u_n 代入泛函得

$$J(u_n)=\frac12\int_a^b[pu_n'^2+qu_n^2-2fu_n]\,dx = \frac12\sum_{i=1}^{n}\int_{I_i}[pu_n'^2+qu_n^2]\,dx - \sum_{i=1}^{n}\int_{I_i} f u_n\,dx$$

利用仿射变换得：①

$$J(u_n)=\frac12\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\Big[p(x_{i-1}+h_i\xi)\frac{(u_i-u_{i-1})^2}{h_i} + h_i q(x_{i-1}+h_i\xi)\big(N_0(\xi)u_{i-1}+N_1(\xi)u_i\big)^2\Big]d\xi - \sum_{i=1}^{n} h_i\int_0^1 f(x_{i-1}+h_i\xi)\big(N_0(\xi)u_{i-1}+N_1(\xi)u_i\big)\,d\xi$$

工程上一般不这样做.

$$\frac{\partial J(u_n)}{\partial u_j} = a_{j-1,j}u_{j-1}+a_{jj}u_j+a_{j+1,j}u_{j+1}-b_j=0.$$

$a=\int_0^1[\cdots]\,d\xi$ 得到线性方程组 —— 有限元方程.

分析第i项方程，即第i个单元

工程上，先分析每一单元的局部二次型及单元矩阵. —— 单元刚度矩阵.

再由单元刚度矩阵形成总矩阵. —— 总刚矩阵.

① 是 u_{i-1},u_i 的二次形，可写为 $u^{(i)T}K^{(i)}u^{(i)}$ $\quad K^{(i)}=\begin{pmatrix} a^{(i)}_{i-1,i-1}, & a^{(i)}_{i-1,i}\\ a^{(i)}_{i,i-1}, & a^{(i)}_{ii}\end{pmatrix}$

扩展为 $n\times n$

① 可写为 $\frac12\sum_{i=1}^{n}u^TK^{(i)}u = \frac12 u^T\left(\sum_{i=1}^{n}K^{(i)}\right)u=\frac12u^TKu$

$K=\sum_{i=1}^{n}K^{(i)}$ 为总刚度矩阵.

步骤：(1) 计算 $K^{(i)}$ 的元素 $a^{(i)}_{i-1}\cdots$，编出其编号(行列号)

(2) K 中的 i行j列元素，等于所有 $K^{(i)}$ 具有相同编号的和.

令 $f^{(i)}=(f_{i-1}^{(i)},f_i^{(i)})^T$ $\begin{cases} f_{i-1}^{(i)}=h_i\int_0^1 f(x_{i-1}+h_i\xi)(1-\xi)d\xi, \\ f_i^{(i)}=h_i\int_0^1 f(x_{i-1}+h_i\xi)\xi d\xi. \end{cases}$

令 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ $b_1=f_1^{(1)}+f_1^{(2)}$, $b_2=f_2^{(2)}+f_2^{(3)}$, $\cdots$, $b_n=f_n^{(n)}$

$$\Downarrow$$

$$u^Tb=\sum_{i=1}^n(u^{(i)})^Tf^{(i)}$$

$$\Downarrow$$

$$J(u_n)=\frac{1}{2}u^TKu-u^Tb$$

$$\Downarrow$$

$$Ku=b$$

注2.1.1 当第一边值条件(左边值条件)非齐次时，若 $u(a)=\alpha$，

处理办法，1) 形成 $I_1=[x_0,x_1]$ 上的单刚矩阵.

2) K扩大成 $(n+1)\times(n+1)$ $u_0=\alpha$ 当未知量.

3) 把第一列的第j行元素 a_{j0} 乘以 $(-u_0)=(-\alpha)$，累加到第j个方程的右端，去掉第一列.

最终效果，只是右端向量作了修改.

注2.1.2. 若第二边值条件(右边值条件)非齐次，$u'(b)=\beta$.

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_a^b[pu'^2+qu^2-2fu]dx-\beta p(b)u_n.$$

不影响总刚度矩阵.

处理办法是第n个方程的右端要累加 $\beta p(b)$

对于第三边值条件. $u'(b)+\alpha u(b)=\beta$

则两个都要修改，自推.

??? 标准单元内基函数仿射变换后???

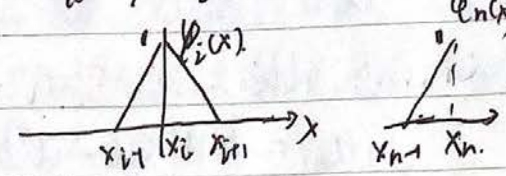
2.1.2 从 Galerkin 法出发

构造 试探函数空间 U_n 的一组基底

① 基 $\varphi_i(x) = \begin{cases} 1+\frac{x-x_i}{h_i}, & x_{i-1} \le x \le x_i \\ 1-\frac{x-x_i}{h_{i+1}}, & x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0, & 其他 \end{cases}$ $\varphi_n = \begin{cases} 1+\frac{x-x_n}{h_n}, & x_{n-1} \le x \le x_n \\ 0, & 在别处. \end{cases}$

由线性插值公式得

$u_n(x) = \frac{x_i - x}{h_i} u_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} u_i.$



则任一 $u_n \in U_n$. $u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i(x)$, $u_i = u_n(x_i)$.

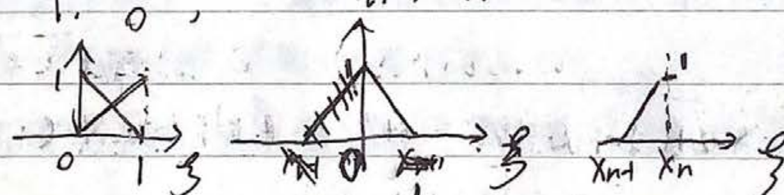
② $a(u,v) = \int_a^b [pu'v' + quv]\, dx$

$\xrightarrow{\text{Galerkin法}} \sum_{i=1}^{n} a(\varphi_i, \varphi_j) u_i = \int_a^b f \varphi_j\, dx$. $j = 1, 2, \cdots, n$.

③ 仿射变换 ~~$\xi = \frac{x - x_i}{h_{i+1}}$~~, $N_0(\xi) = 1 - \xi$, $N_1(\xi) = \xi$.

$\varphi_i(x) = \begin{cases} N_0(\xi), & \xi = \frac{x - x_i}{h_{i+1}}, & x_i \le x \le x_{i+1} \\ N_1(\xi), & \xi = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x_{i-1} \le x \le x_i. \\ 0, \end{cases}$ $\varphi_n(x) = \begin{cases} N_1(\xi), & x_{n-1} \le x \le x_n \\ 0. \end{cases}$

$\xi = \frac{x - x_{n-1}}{h_n}$



④ 计算 $a(\cdot,\cdot)$ 当 $|j-i| \ge 2$ 时 $\varphi_i \cdot \varphi_j = 0$.

$a(\varphi_{j-1}, \varphi_j)$
$a(\varphi_j, \varphi_j)$
$a(\varphi_{j+1}, \varphi_j)$

j行 $\begin{bmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1), & a(\varphi_1, \varphi_2) & & \\ & \cdots & & \\ & a(\varphi_{j-1}, \varphi_j), & a(\varphi_j, \varphi_j), & a(\varphi_{j+1}, \varphi_j) \\ & & a(\varphi_n, \varphi_{n-1}), & a(\varphi_n, \varphi_n) \end{bmatrix}$

⑤ 右端项. $\int_a^b f \varphi_j\, dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \varphi_j(x) + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) \varphi_j(x)\, dx$

$= h_j \int_0^1 f(x_{j-1} + h_j \xi) \xi\, d\xi + h_{j+1} \int_0^1 f(x_j + h_{j+1}\xi)(1-\xi)\, d\xi$

注2.1-3 假若左非齐 $u(a)=\alpha$.

增加 $\varphi_0(x) = \begin{cases} 1-\frac{x-x_0}{h_1}, & x_0\le x\le x_1 \\ 0, & 其他. \end{cases}$

$$u_n = \alpha\varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} u_i\varphi_i(x)$$

有限元方程为

$$\alpha a(\varphi_0,\varphi_j) + \sum_{i=1}^{n} a(\varphi_i,\varphi_j)u_i = (f,\varphi_j), \quad j=1,2,\cdots,n.$$

或

$$\sum_{i=1}^{n} a(\varphi_i,\varphi_j)u_i = (f,\varphi_j) - \alpha a(\varphi_0,\varphi_j), \quad j=1,2,\cdots,n.$$

注2.1.4. 假若 $u'(b)=\beta$

则右端修改为 $(f,\varphi_j)+p(b)\beta\varphi_j(b)$.

有限元方程为 $\sum_{i=1}^{n} u_i\int_a^b[p\varphi_i'\varphi_j'+q\varphi_i\varphi_j]dx = (f,\varphi_j)+p(b)\beta\varphi_j(b)$ $j=1,2,\cdots,n$

$\varphi_j(b)=0$. 当 $j=1,2,\cdots,n-1$ $\varphi_n(b)$才有值，只修改了第n个方程

???

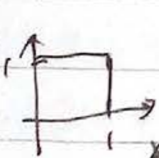
试探函数由剖分节点上一组$\{u_j\}$(广义坐标)唯一决定
因此有限元空间U_n的维数和$\{u_j\}$的个数相等

实际计算时，并不消去中间变量ξ,η.
因为计算刚度矩阵元素时，用ξ,η作自变量更加方便

2.4 二维矩形元空间.

试探函数$u_n(x,y)$，在每一单元上是多项式 —— ~~单形~~ 单元形状函数.

单位正方形 $I\times I=[0,1]\times[0,1]$



形函数 $P_{11}(\xi,\eta)=c_0+c_1\xi+c_2\eta+c_3\xi\eta$

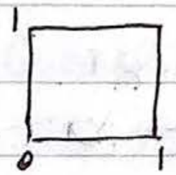
$N_0(\xi)=1-\xi$, $N_1(\xi)=\xi$.

$$P_{11}(\xi,\eta)=N_0(\xi)N_0(\eta)u_{00}+N_0(\xi)N_1(\eta)u_{01}+N_1(\xi)N_0(\eta)u_{10}+N_1(\xi)N_1(\eta)u_{11}$$

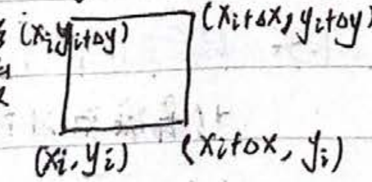
$N_{ij}\to\varphi_{ij}\to$ 得到形状函数 ← 仿射变换

基函数转变

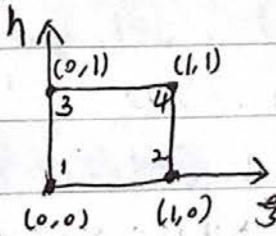
$[X] = [0,1]\times[0,1]$ $\qquad$ $R_{ij} = [x_i, x_i+\Delta x; y_j, y_j+\Delta y]$



形函数 N $\xrightarrow{\xi=(x-x_i)/\Delta x,\ \eta=(y-y_i)/\Delta y}$ 形函数 φ

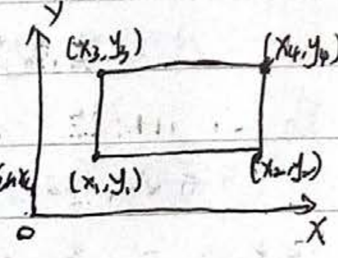


2.6 曲边元和等参变换



仿射变换

$$\begin{cases} x=(1-\xi)(1-\eta)x_1+\xi(1-\eta)x_2+(1-\xi)\eta x_3+\xi\eta x_4 \\ y= \cdots \end{cases}$$



参考单元 E $\qquad$ 单元 K (R)

双线性函数 $P_E(\xi,\eta)$ $\qquad$ 双线性函数 $P_R(x,y)$

一般单元变换:

$$E \xleftrightarrow[(\xi,\eta)\in E,\ (x,y)\in K]{F=F_K(\xi,\eta)=(x(\xi,\eta),\, y(\xi,\eta))} K$$

F需满足: ① 光滑性. 常取它为 ξ,η 的多项式

② F_K 应是E到K一对一变换. F_K 的Jacobi行列式 $J(\xi,\eta)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\neq 0$, $(\xi,\eta)\in E$.

多项式 $\qquad$ 不一定多项式(有理,无理)

$P_E(\xi,\eta) \xrightarrow{F} P_K(\xi,\eta)$

积分过程一般通过 F 化为E上对 ξ,η 的积分.

重要

F的构造方法: 等参变换. 取 F 和 形状函数具同样形式

2.7 二阶椭圆型方程的有限元法

2.7.1 有限元方程的形成

假设已按一定次序分别把节点和单元编号

① 工程界流行的方法：Ritz法及单元形状函数 ⟶ 单元刚度矩阵(阶数=自由度)

⟶ 单刚叠加生成总刚度矩阵

???函数值、导数!

② 从Galerkin法及节点基函数出发(一个节点有几个广义坐标，就有几个基函数)

直接形成有限元方程 — 无组装过程!!!

例. 设基函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$.

边值问题的变分形式为：求 $u \in H_E^1$ 使 $a(u,v)=(f,v)$ $\forall v \in H_E^1$

则有限元方程为 $\sum_{i=1}^{n} a(\varphi_i, \varphi_j)u_i = (f, \varphi_j)$, $j=1,2,\cdots,n$

注：φ_i, φ_j 对应节点相邻时才不为0，由在单元上的限制"拼凑"成的．实际计算归结为单元上的积分

区别：① 从单元出发(单刚)，形成有限元方程(总刚)

② 直接按节点形成方程.

双线性形式 $a(u,v)$ 对称正定，则系数矩阵对称正定 → 有限元方程组的解唯一

2.7.2 矩阵元素的计算

形成有限元方程的主要工作量 —— 计算大量 $\boxed{\text{积分}}$

通过变量代换 — 仿射变换或等参变换．把其化成 $\xi\eta$ 平面上参考元上上的积分.

例如边值问题

$$\begin{cases} -\nabla(a(x,y)\nabla u(x,y)) = f(x,y), & (x,y)\in G \\ u|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

相应的双线性形式

$$a(u,v) = \int_G a(x,y)[u_x v_x + u_y v_y]\,dxdy$$

$$= \sum_K \int_K a(x,y)[u_x v_x + u_y v_y]\,dxdy$$

K是网格剖分单元

x-y 空间.

变量代换：$\int_K a(x,y)[u_x v_x + u_y v_y]\,dx\,dy$

$$= \int_E a\circ F_K \left[\left((u\circ F_K)'_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + (u\circ F_K)'_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left((v\circ F_K)'_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + (v\circ F_K)'_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + (\quad)(\quad)\right] J(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$a\circ F_K$ 表示 $a(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$，$u\circ F_K$，$v\circ F_K$ 类似. $dx\,dy = J(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \eta}/J, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \xi}/J, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial \xi}/J, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial x}{\partial \eta}/J$$

J 是 $x = x(\xi,\eta)$，$y = y(\xi,\eta)$ 的 Jacobi 行列式.

$$= \int_E a\circ F_K \left[\left((u\circ F_K)'_\xi \frac{\partial y}{\partial \eta} - (\quad)' \frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\left((\quad)' \frac{\partial y}{\eta} - (\quad)' \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) + \left((\quad)' \frac{\partial x}{\partial \xi} - (\quad)' \frac{\partial x}{\eta}\right)(\quad)\right]$$
$$J^{-1}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

取 u, v 为基函数 φ_i，φ_j

其中 $\varphi_i\circ F_K$，$\varphi_j\circ F_K$ 是参考单元 E 上的基函数. 而 $J^{-1}(\xi,\eta)$ 是 ξ,η 的有理函数.

一般情形，需用数值积分，通常用 Gauss 求积公式

Poisson 方程

$$-\Delta u = f(x,y), \quad (x,y)\in G$$

Δ 为拉普拉斯算子. 上式可写为 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u(x,y,z) = f(x,y,z)$

G 是 xy 平面的一有界域. 边界 Γ 是分段光滑的简单闭曲线.

Γ 上给出下列边值条件之一：

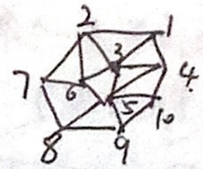
$$u|_\Gamma = \alpha(x,y) \qquad \text{(第一边值条件)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = \beta(x,y) \qquad \text{(第二边值条件)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ku\Big|_\Gamma = \gamma(x,y) \qquad \text{(第三边值条件)}$$

$f(x,y)$，$\alpha(x,y)$，$\beta(x,y)$，$\gamma(x,y)$ 及 $k(x,y)$ 都是给定的连续函数.

边值条件也可以这样给：Γ 的一部分满足一种边值条件，另一部分满足其他边值条件.



边值条件处理方法:

1) 第一边值条件. 若形状函数是线性函数,

则有限元方程: $\sum_{i=1}^{10} a(\varphi_i, \varphi_j) u_i = (f, \varphi_j)$, $j = 3, 5, 6$

用边值 $u_i = \alpha_i = \alpha(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 4, 7, 8, 9, 10)$ 代入左端相应项,

并移至右端,得出有限元方程.

2) 第二边值条件. (自然边值条件)

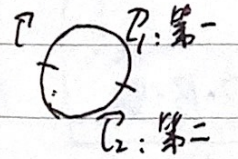
$$a(u, v) = \int_G \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right] dxdy \qquad \int_G f v dxdy + \int_\Gamma \beta v ds$$

3) 第三边值条件 (自然边值条件)

$$a(u, v) = \int_G \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right] dxdy + \int_\Gamma k u v ds \qquad \int_G f v \, dxdy + \int_\Gamma \gamma v ds$$

注意. 基函数支集的局部性,知曲线积分只对界点及与界点相邻节点上的有限元方程有影响.

4) 混合边值条件:



1. 用前述方法分别处理 Γ_1、Γ_2

2. 交界点处应取作剖分节点,把它当作第一边值点处理.

Poisson方程的有限元法的步骤.

1、把边值问题化成变分形式

2、对求解域作网格剖分

3、构造基函数(或单元形状函数)

4、形成有限元方程.

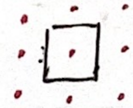
第一边值. 内点 $1, 2, \cdots, n_1$, 界点 $n_1+1, \cdots, n_1+n_2$.

$$\sum_{i=1}^{n_1} a(\varphi_i, \varphi_j) u_i = (f, \varphi_j) - \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} a(\varphi_i, \varphi_j)\alpha_i \qquad j = 1, 2, \cdots, n_1$$

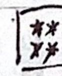
$\alpha_i = \alpha(x_i, y_i)$ $i = n_1+1, \cdots, n_1+n_2$

5、解有限元方程

思考：工程做法是在一个单元内先生成单元刚度矩阵了!!!
是对一个单元内积分
物理域



设有9个控制点-对于一个单元
相当于9个基函数在单元内非0，9个组



积分点

场位方程：

$$\nabla^2 u = f(\vec{x})$$

力平衡方程.

$$-\sigma_{ij,j} = f_i$$

几何方程：$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$

本构方程：$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

E为弹性模量，ν为泊松比，
G为剪切模量；$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$为体积应变

矩阵形式：

$$\varepsilon = C\sigma \quad 或 \quad \sigma = D\varepsilon.$$

C为柔度矩阵，D为弹性矩阵

高斯点

$$K = \int B^T D B \, dV = \sum_{i=1}^{m} B^T D B(\xi,\eta,\zeta) \, W_i ?$$

$$\cancel{K \cdot q = P}$$

整体平衡：$K \cdot u = P$

$$\boxed{\Pi = \frac{1}{2} q_u^T K q_u - P^T q_u \qquad u = N \cdot q_u \quad \varepsilon = B \cdot q_u \quad \sigma = D \cdot B \cdot q_u}$$

$$K = \int_\Omega B^T(x,y,z,\tfrac{\partial}{\partial x},\tfrac{\partial}{\partial y},\tfrac{\partial}{\partial z}) D B \, d\Omega$$

$$= \cancel{\int_E B^*(\xi}$$

$$= \int_E (B \circ F_K)^T \cdot D \cdot (B \circ F_K) |J| \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

J

要计算K时，在高斯点处计算B的值.

$$B(x,y,z,\tfrac{\partial}{\partial x},\tfrac{\partial}{\partial y},\tfrac{\partial}{\partial z}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

6×3

$N(x,y,z)$
$3 \times 3n$（节点数）

$$\begin{bmatrix} N_1 & & & N_2 & & & & \\ & N_1 & & & N_2 & & & \\ & & N_1 & & & N_2 & \cdots & N_n & & \\ & & & & & & & & N_n & \\ & & & & & & & & & N_n \end{bmatrix}$$

三维，n节点，三自由度.

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\eta}\\ \frac{\partial x}{\varsigma} & \frac{\partial y}{\varsigma} & \frac{\partial z}{\varsigma}\end{bmatrix}_{3\times3}$$

$x(\xi,\eta,\rho)=N_1(\xi,\eta,\rho)x_1+N_2(\xi\cdots)x_2+\cdots$

$y(\xi,\eta,\rho)$

$z(\xi,\eta,\rho)$

$$\underset{3\times1}{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}}=\underset{3\times n}{N(\xi,\eta,\rho)}\cdot\underset{n\times1}{q_n}$$

$$\underset{6\times3}{\left[\partial(\eta,\xi,\rho)\right]}=\underset{6\times3}{\left[\partial(x,y,z)\right]}\cdot J$$

$$B\Rightarrow\underset{6\times3}{\left[\partial(\eta,\xi,\rho)\right]}\cdot\underset{3\times3}{J^{-1}}\underset{3\times3n}{N(x(\eta,\xi,\rho),y(\eta,\xi,\rho),z(\eta,\xi,\rho))}$$

!! ?!!

$N(\eta,\xi,\rho)$

J^{-1}

D

~~[illegible]~~ 6×6 — 三维.

n为节点数　3表示三维.

$$K=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\underset{3n\times3}{N^T}\cdot\underset{3\times3}{(J^{-1})^T}\cdot\underset{3\times6}{[\partial]^T}\cdot\underset{6\times6}{D}\cdot\underset{6\times3}{[\partial]}\cdot\underset{3\times3}{J^{-1}}\cdot\underset{3\times3n}{N}\,|J|\,d\xi\,d\eta\,d\rho$$

3n×3n.
三维.

单刚

平面应力问题的弹性矩阵.

$$\underset{[3\times3]}{D}=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1&\mu&0\\ \mu&1&0\\ 0&0&\frac{1-\mu}{2}\end{bmatrix}$$

空间

$$\underset{[6\times6]}{D}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu&\nu&\nu&0&0&0\\ &1-\nu&\nu&0&0&0\\ &&1-\nu&0&0&0\\ &\text{对称}&&\frac{1-2\nu}{2}&0&0\\ &&&&\frac{1-2\nu}{2}&0\\ &&&&&\frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}$$

$\nu.\mu.$

总刚K的数量. 假设 9节点 二自由度. K $9\times2=18$ $[18\times18]$.

二维　n节点　二自由度.

$$\underset{[2n\times2n]}{K}\underset{[2n\times1]}{u}=P\quad=2n\times1.$$

二维　4节点　二自由度

$$\underset{[8\times8]}{K}\underset{[8\times1]}{u}=\underset{[8\times1]}{P}$$

$B=[3\times2]\overset{2\times4}{[2\times8]}=3\times8$

$$K=\int\underset{8\times3}{B^T}\underset{3\times3}{D}\underset{3\times8}{B}\,dA=[8\times8]$$

母单元里 N 是关于 ξ,和 η 的形函数 $N(\xi,\eta)$.
形函数

$N(x,y)=N(\xi(x,y),\eta(x,y))$???

$N(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))=N(\xi,\eta)$

二维4节点. 二自由度.

$$\underset{[3\times 8]}{B}=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array}\\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc}\frac{\partial N_1(x,y)}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x}\end{array}\right]\end{array}$$

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial N(\xi,\eta)}{\partial x}\\ \frac{\partial N(\xi,\eta)}{\partial y}\end{bmatrix}=J^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\partial N(\xi,\eta)}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N(\xi,\eta)}{\partial \eta}\end{bmatrix}$$

1、高斯点处的程序 形函数及导数.

$$\begin{bmatrix}N_1\\N_2\\N_3\\N_4\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}\frac{\partial N(\xi,\eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1}{\partial \eta}\\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta}\\ \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta}\\ \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta}\end{bmatrix}_{4\times 2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=\frac{\partial N_1(\xi,\eta)}{\partial \xi}x_1+\frac{\partial N_2}{\partial \xi}x_2+\frac{\partial N_3}{\partial \xi}x_3+\frac{\partial N_4}{\partial \xi}x_4$$

2、计算高斯点处的雅可比矩阵 及其逆.

3、求B矩阵 $J^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1(\xi,\eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1}{\partial \eta}\\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \vdots\\ \vdots & \end{bmatrix}=\left[\frac{\partial N_1(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right.$

4、单刚 [8×8]

5、总刚 [18×18] 共9个节点.

$$x=\sum_{i=1}^{m}N_i(\xi,\eta)x_i\ ,\quad y=\sum_{i=1}^{m}N_i(\xi,\eta)y_i$$

逆变换 $\xi=\xi(x,y)\qquad \eta=\eta(x,y)$
(实际不需要)

$$\underbrace{N_i(\xi,\eta)}_{\text{标准单元的形函数}}=N_i[\xi(x,y),\eta(x,y)]=\underbrace{\bar{N}_i(x,y)}_{\text{真实单元的形函数}}$$

单元位移函数可表示为.

$$\begin{cases}u=\sum_{i=1}^{m}\bar{N}_i(x,y)u_i=\sum_{i=1}^{m}N_i(\xi,\eta)u_i\\ v=\sum_{i=1}^{m}\bar{N}_i(x,y)v_i=\sum_{i=1}^{m}N_i(\xi,\eta)v_i\end{cases}$$

泛函是以函数为变量的函数
求泛函极值的方法称为变分法.

GeoPDEs

assume: 物理域: $\Omega \subset \mathbb{R}^3 \xleftarrow{F}$ 参数域 $\hat{\Omega}$

Hilbert space: $V \xleftrightarrow{dual} V'$

$(\cdot,\cdot)$ 表示 V 中的标量积　　V' 为{V 的全体线性函数}

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 V 和 V' 之间的对偶对, 将 V 和 V' 中的函数映射到实数域的操作。

这个映射可以是内积, 或积分。

bilinear form $a: V\times V \to \mathbb{R}$

linear functional $l \in V'$

* 源问题的变分形式:

变分 $\boxed{\text{Find } u \in V,\ a(u,v) = \langle l, v\rangle,\ \forall v \in V}$

The Galerkin procedure (伽辽金): 有限维空间 $V_h \xrightarrow{\text{逼近}}$ 无限维空间 V

离散 $\boxed{\text{Find } u_h \in V_h,\ a(u_h,v_h) = \langle l, v_h\rangle,\ \forall v_h \in V_h}$

	standard FEM	IGA
V_h	分段多项式	NURBS 基函数

$$V_h := \{v_h \in V : \hat{v}_h = \iota(v_h) \in \hat{V}_h\} = \{v_h \in V : v_h = \iota^{-1}(\hat{v}_h),\ \hat{v}_h \in \hat{V}_h\}$$

$\iota \leftrightarrow F$　　~~$\hat{V}_h$ 是离散空间 $\hat{\Omega}$ 上~~　$\hat{V}_h$ 是参数域 $\hat{\Omega}$ 的离散空间

$\{\hat{v}_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ 是 $\hat{V}_h$ 的基,　$\{v_j\}_{j\in\mathcal{J}} = \{\iota^{-1}(\hat{v}_j)\}_{j\in\mathcal{J}}$ 是 V_h 的基

$$u_h = \sum_{j\in\mathcal{J}} \alpha_j v_j = \sum_{j\in\mathcal{J}} \alpha_j \iota^{-1}(\hat{v}_j)$$

$\mathcal{J} := \{\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) : 1 \le j_d \le n_d,\ d = 1,2,3\}$

coefficients α_j are unknows.

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} a(v_j, v_i)\alpha_j = \langle l, v_i\rangle,\ \forall v_i \in V_h$$

quadrature rules for numerical integration

P限基函数次数 $\boxed{\mathcal{L}_h}$ 是参数域 $\hat{\Omega}=(0,1)^3$ 的笛卡尔划分

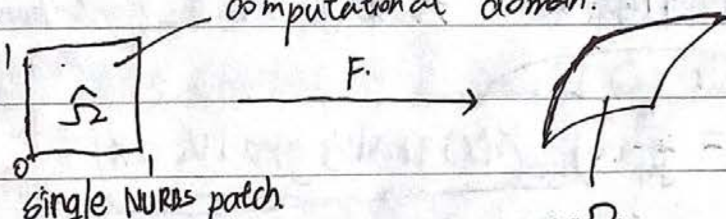
space of NURBS : $N^{p_1p_2p_3}(\mathcal{Q}_h; w)$ / $N^{p_1p_2p_3}$ $\quad W=\sum_{j\in\mathcal{J}} w_j B_j$

$$N_i(\hat{x})=\frac{w_i B_i(\hat{x})}{W}$$

描述几何(物理)域，引入控制点映射 $C_i\in R^3$

$$F: \hat{\Omega}\to\Omega \quad \hat{x}\to x=F(\hat{x}) := \sum_{j\in\mathcal{J}} N_j(\hat{x})C_j$$

Poisson problem.



mix boundary — $\partial\Omega=\Gamma_N\cup\Gamma_D$

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(K(\hat{x})\,\mathrm{grad}\,u)=f & \text{in } \Omega,\\ K(\hat{x})\frac{\partial u}{\partial n}=g & \text{on } \Gamma_N,\\ u=0 & \text{on } \Gamma_D, \end{cases}$$

simplicity: $f\in L^2(\Omega)$

$g\in L^2(\Gamma_N)$

源

值和导数都为0

变分 Find $u\in H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega)$, $\quad H^1_{0,\Gamma_D}=\{v\in H^1(\Omega): v=0 \text{ on } \Gamma_D\}$. 基函数在$\Gamma_D$的迹为0

$$\int_\Omega K(x)\,\mathrm{grad}\,u\cdot\mathrm{grad}\,v\,dx=\int_\Omega f v\,dx+\int_{\Gamma_N} g v\,d\Gamma \quad \forall v\in H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega)$$

Galerkin

离散 Find $u_h\in V_h$

$$\int_\Omega K(x)\,\mathrm{grad}\,u_h\cdot\mathrm{grad}\,v_h\,dx=\int_\Omega f v_h\,dx+\int_{\Gamma_N} g v_h\,d\Gamma \quad \forall v_h\in V_h$$

有限元

离散空间 $V_h=\{v_h\in H^1_{0,\Gamma_D}: v_h=\hat{v}_h\circ F^{-1},\ \hat{v}_h\in\hat{V}_h\}$

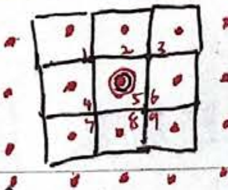
令 $N_h=\dim(\hat{V}_h)=\dim(V_h)$ $\quad \{\hat{v}_i\}_{i=1}^{N_h}$ 是 $\hat{V}_h$ 的基.

$\{v_i=\hat{v}_i\circ F^{-1}\}_{i=1}^{N_h}$ 是 V_h 的基.

有限维空间

继续 思考：

一个节点(基函数)涉及到九个单元.
刚度矩阵可以看作有重叠.



从节点(基函数)出发，但基函数(或其导数)只在一些单元内非0，所以其积分只在一些单元内有效（例如中间节点对应基函数在1-9单元内非0，只在这9个单元上积分。一进一步，只有 v_j, v_i 都有效时才有用

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j (\hat{v}_j \circ F^{-1})$$

$$\text{grad } u_h = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \text{ grad } v_j = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j (DF)^{-T} (\text{grad } \hat{v}_j \circ F^{-1})$$

其中 DF 是 F 的 Jacobian 矩阵. $(DF)^{-T}$ 是它的逆转置.

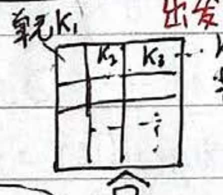
$$\sum_{j=1}^{N_h} A_{ij} \alpha_j = \int_\Omega k(x) \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \text{ grad } v_j \cdot \text{grad } v_i \, dx = \int_\Omega f v_i \, dx + \int_{\Gamma_N} g \, v_i \, d\Gamma = f_i + g_i \qquad i = 1, \cdots, N_h$$

A_{ij} 是刚度矩阵的系数. f_i 和 g_i 分别是 right-hand 和边界的系数

自推：$\sum_{j=1}^{N_h} \boxed{A_{ij}} \alpha_j = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \boxed{\int_\Omega k(x) \text{ grad } v_j \text{ grad } v_i \, dx}$

思考：$\int_\Omega$ 是对整个物理域内的积分，从节点、从基函数出发.

quadrature rule：

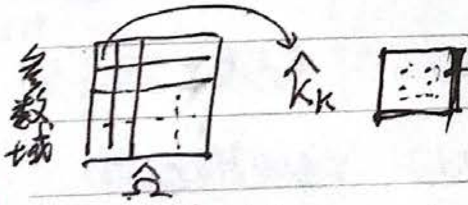


共划分为 Ne 个区域.
Ne 个 elements.

积分的参数域划分：$\boxed{\hat{\mathcal{H}}_h} := \{\hat{K}_k\}_{k=1}^{Ne}$

$\updownarrow F$

物理域划分：$\mathcal{H}_h := \{K_k\}_{k=1}^{Ne}$ $\qquad K_k := F(\hat{K}_k)$ $\qquad \bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{Ne} F(\hat{K}_k)$



n_k 个积分点 $\{\hat{x}_{l,k}\} \subset \hat{K}_k$, $l = 1, \cdots, n_k$

权重 $\{w_{l,k}\} \subset \mathbb{R}$, $l = 1, \cdots, n_k$

对 单元的通用积分

K_k - 物理域 $\qquad \phi \in \mathcal{L}^1(K_k)$

$$\int_K \phi \, dx = \int_{\hat{K}_k} \phi(F(\hat{x})) \, |\det(DF(\hat{x}))| \, d\hat{x} \simeq \sum_{l=1}^{n_k} w_{l,k} \, \phi(x_{l,k}) \, |\det(DF(\hat{x}_{l,k}))|$$

$x_{l,k} := F(\hat{x}_{l,k})$ —— 物理域的积分点

由求积规则可得：

$$A_{ij} \simeq \sum_{k=1}^{Ne} \sum_{l=1}^{n_k} k(x_{l,k}) \, w_{l,k} \, \text{grad } v_j(x_{l,k}) \cdot \text{grad } v_i(x_{l,k}) \, |\det(DF(\hat{x}_{l,k}))|$$

$$f_i \simeq \sum_{k=1}^{Ne} \sum_{l=1}^{n_k} f(x_{l,k}) \, w_{l,k} \, v_i(x_{l,k}) \, |\det(DF(\hat{x}_{l,k}))|.$$

for boundary term:

mapping: $F_b: (0,1) \to \Gamma_N$ for 2D geometries.

$F_b: (0,1)^2 \to \Gamma_N$ for 3D geometries.

定义边界上的积分规则(大多数继承整个定义域内的积分规则)

参数域积分点坐标表示为 $t_{l,k}$ ($s_{l,k}, t_{l,k}$) 物理域: $X^b_{l,k}$

2D. $\int_{K_k^b} \phi \, d\Gamma = \int_{\hat{K}_k^b} \phi(F_b(t)) |F_b'(t)| dt \approx \sum_{l=1}^{n_k^b} W^b_{l,k} \phi(X^b_{l,k}) |F_b'(t_{l,k})|$.

Neumann. term.

$$g_i \simeq \sum_{k=1}^{N_e} \sum_{l=1}^{N_k} g(X^b_{l,k}) w^b_{l,k} v_i(X^b_{l,k}) |F_b'(t_{l,k})|.$$

3D. $\int_{K_k^b} \phi \, d\Gamma = \int_{\hat{K}_k^b} \phi(F_b(s,t)) \left|\frac{\partial F_b}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial F_b}{\partial t}(s,t)\right| ds\,dt$

$$\simeq \sum_{l=1}^{n_k^b} W^b_{l,k} \phi(X^b_{l,k}) \left|\frac{\partial F_b}{\partial s}(s_{l,k}, t_{l,k}) \times \frac{\partial F_b}{\partial t}(s_{l,k}, t_{l,k})\right|.$$

Neumann term.

$$g_i \simeq \sum_{k=1}^{N_e} \sum_{l=1}^{n_k} g(X^b_{l,k}) w^b_{l,k} v_i(X^b_{l,k}) \left|\frac{\partial F_b}{\partial s}(s_{l,k}, t_{l,k}) \times \frac{\partial F_b}{\partial t}(s_{l,k}, t_{l,k})\right|.$$

remark:

几何参数域的划分 $\hat{\mathcal{K}}_n$ 与积分参数域的划分可以是不同的.

笛卡尔网格的求积规则: $\hat{x}_{l,k} = (\hat{x}^1_{l_1,k_1}, \cdots, \hat{x}^n_{l_n,k_n})$, $\hat{\omega}_{l,k} = \prod_{d=1}^{n} \hat{w}_{l_d,k_d}$; for $l=1,\cdots,\prod_{d=1}^{n} n_{k_d}^d$

$$\to \operatorname{grad} N_i = (J_F^+)^T (\widehat{\operatorname{grad} \hat{N}_i \circ F^{-1}}) \qquad J_F^+ = (J_F^T J_F)^{-1} J_F^T$$

张量积求积规则: 第k个单元, d维度定义 n_k^d 个求积点, 积分点 $\hat{x}^d_{l,k}$, 权重 $\hat{\omega}^d_{l,k}$ $1 \le l \le n_k^d$

d维度方向有 N_{el}^d 个单元, 单元总数 $N_{el} = \prod_{d=1}^{n} N_{el}^d$

linear elasticity.

$\Omega \subset R^d$, $d=2,3$. 线性, 弹性, 各向同性.

一部 Γ_D 固定, 一部分 Γ_N 施加载荷 g.

u 为弹性体的位移.

表示两个应力张量的内积.
$A:B = A_{ij}B_{ij}$? 双冒号乘积的结果是一标量值

Find $u \in V = (H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega))^d$

$$\int_\Omega \left(2\mu \underline{\varepsilon(u):\varepsilon(v)} + \lambda\, div(u)\, div(v)\right) = \int_\Omega f\cdot v + \int_{\Gamma_N} g\cdot v \quad \forall v\in V.$$

λ 和 μ 是拉梅参数 (Lamé parameters)

$\varepsilon(u)$ 是应变张量.

??? $t\in I$

与前述模型相比, 空间 V 和 V_h 是向量值函数空间 $(x,y,z)=(f(t),g(t),h(t))$???

$(u_x, u_y, u_z)=(f(t), g(t), h(t))$??? 点映射到向量.

参数域 $[0,1]^n$

$\hat{B}_{i,p}(\hat{x}) := \hat{B}_{i_1,p_1}(\hat{x}_1)\dots\hat{B}_{i_n,p_n}(\hat{x}_n)$

张量积空间的: $N_h = \prod_{d=1}^n N_d$

基函数的全局编号.

for $n=2$, $i_1+(i_2-1)N_1$

for $n=3$, $i_1+(i_2-1)N_1+(i_3-1)N_1N_2$

vector-valued discrete spaces.

$\hat{\Omega}$ $\xrightarrow{\quad F \quad}$ Ω

参数域中为离散空间设置基函数　　映射　　物理域

为每个分量定义一个NURBS空间
对除一个分量之外的所有分量
取向量值空间的基函数为空

可能的转换:

$V_h = \hat{V}_h \circ F^{-1}$ (grad-preserving)

$V_h = (J_F^{+})^T(\hat{V}_h \circ F^{-1})$ (curl-preserving)

$V_h = \frac{1}{|J_F|} J_F (\hat{V}_h \circ F^{-1})$ (div-preserving)

举例. $\hat{\Omega} \subset R^2$ 二维
维数为 N 的 NURBS空间 $N_p(\Xi; w)$ 对每分量.
向量值空间维数 $N_h = 2N$

$J_F^{+} = (J_F^T J_F)^{-1} J_F^T$
保 grad-p 分别作用于每个分量.
curl-p、div-p 一起作用于向量的所有分量.

$$\left\{\begin{bmatrix}\hat{N}_i\\0\end{bmatrix}\right\}_{i=1}^{N} \sqcup \left\{\begin{bmatrix}0\\\hat{N}_i\end{bmatrix}\right\}_{i=1}^{N}$$