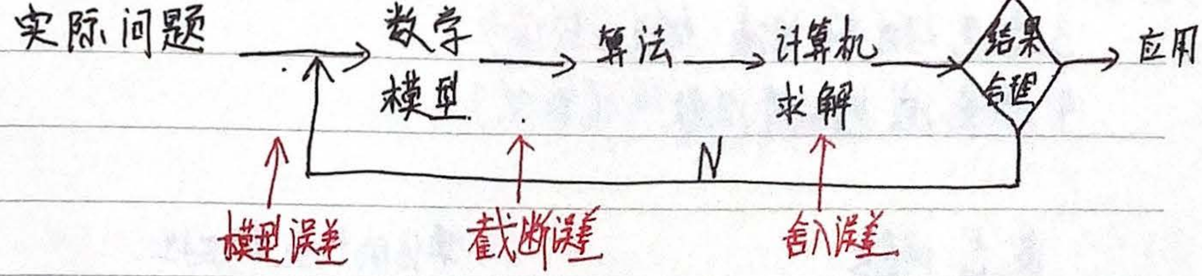
数值分析

第一章.　　第一章.



准确数字　$|x-\tilde{x}| \le \frac{1}{2}\times 10^{-n}$ 则称近似值 $\tilde{x}$ 准确到 n 位小数

有效数字从该位起数至最左端非0位

①科学计数法

$$x = 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_t\times 10^m$$

$$\tilde{x} = 0.\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2\cdots\tilde{\alpha}_t\times 10^m$$

② $|x-\tilde{x}|\le\frac{1}{2}\times10^{m-t} = 0.\underbrace{00\cdots0}_{t个0}5\times\underline{10^m}$

$$\frac{|x-fl(x)|}{|x|}\le\frac{1}{2}\beta^{-(t-1)}$$

③ $\tilde{x}$ 具 x 的 t 个有效数字.

$\tilde{x}$ 准确到 x 的 $t-m$ 位小数.

$2(\beta-1)\beta^{t-1}(U-L+1)$

计算机中　β进制. t位. l的取值范围为 $L\le l\le U$

$$F(\beta,t,L,U)=\{0\}\cup\{fl(x)=\pm0.x_1x_2\cdots x_t\times\beta^l\}$$

$$fl(x)=\tilde{x}=\pm\left\{\frac{x_1}{\beta}+\frac{x_2}{\beta^2}+\cdots+\frac{x_t}{\beta^t}\right\}\times\beta^l=\pm0.x_1x_2\cdots x_t\times\beta^l$$

$L\le l\le U$　$(L<0, U>0)$

$l\notin[L,U]$

$l>U$　上溢.

$l<L$　下溢.

1.避免产生大结果数　可使绝对值很小

2.避免数量级相差较大的数相加减，避免"大数"吃"小数"

3.避免相近数相减　有效位数减少

4.尽量减少运算次数　（乘除）

良态问题　　　　　　　　1.3 算法的数值稳定性

病态问题：数据小变化引起解大变化　　　　舍入误差是否可控

第二章 解线性方程组的直接法

2.1 高斯消去法

乘除法运算量为 $\frac{1}{3}n^3+n^2-\frac{1}{3}n$　　$O(\frac{n^3}{3})$

顺利进行的几个条件

1. A的各阶顺序主子式均不等于零
2. A是对称正定矩阵
3. A是严格对角占优矩阵　$\sum_{j\neq i}^{n}|a_{ij}|<|a_{ii}|$，$i=1,2,\cdots,n$

~~2.2~~ 列主元高斯消去法（选取绝对值最大的元）

2.2 矩阵的三角分解

$A=LU$

单位下三角　上三角

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ \vdots & 1 & \\ \cdot & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$$A = LU = L D \underbrace{D^{-1} U}_{M^T} = \underbrace{LD}_{\tilde{L}} \underbrace{M^T}_{单位上三角} = \underbrace{\tilde{L}}_{下三角} M^T$$

D是由U的对角线元构成的对角矩阵.

A对称. $A = A^T \Rightarrow A = LDM^T$ $\xRightarrow{唯一性} L = M \Rightarrow A = LDL^T$

$A^T = MDL^T$

A对称正定 $\Rightarrow u_{11} > 0,\ u_{11} \cdot u_{22} > 0 \Rightarrow u_{22} > 0 \Rightarrow u_{ii} > 0,\ i = 1, 2, \cdots n.$

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & & & \\ & \sqrt{u_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix}$$

楚列斯基分解.

$$A = LDL^T = \underbrace{LD^{\frac{1}{2}}}_{G} \underbrace{D^{\frac{1}{2}} L^T}_{G^T} = G \cdot G^T$$

cholesky 分解.

A=LU的紧凑格式

$A = GG^T$ 平方根法.

求解三对角方程组的追赶法 ⟶ 用矩阵 A=LU 分解求三对角方程组称为追赶法

2.3

向量的范数. $f(x) = \|x\|$ 非负实值函数.

① $f(x) \geq 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

② $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$

③ $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ (三角不等式).

三种常用的向量范数：

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|X\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

$$\|X\|_\infty \le \|X_2\| \le \|X\|_1$$

矩阵范数.

(1) $\|A\| \ge 0$，$\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$；

(2) $\forall \alpha \in R$，$\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|$；

(3) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$

(4) $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$ —— 相容性.

矩阵范数$\|A\|$与向量范数$\|X\|$相容.

$$\|AX\| \le \|A\|\,\|X\|$$

矩阵的算子范数.（给定$\|X\|$，定义一种$\|A\|$） 满足相容性条件

$$\|A\|_p = \max_{x\ne 0} \frac{\|AX\|_p}{\|X\|_p} = \max_{\|X\|_p=1} \|AX\|_p.$$

令 $\alpha = \dfrac{1}{\|X\|_p}$ $$\frac{\|AX\|_p}{\|X\|_p} = \|\alpha AX\|_p = \left\|A\frac{X}{\|X\|_p}\right\|_p \overset{z=\frac{X}{\|X\|_p}}{=\!=} \|Az\|_p \quad (\|z\|_p = 1)$$

(1) $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\left\{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right\}$ 列 各列相加最大

(2) $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$ 谱 与指定向量范数相容

(3) $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right\}$ 行 各行相加最大

F范数 $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$

相容.

$$\|AX\|_2 \le \|A\|_F\,\|X\|_2.$$

谱半径　λ_i是A的特征值.　$\rho(A)=\max\limits_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|\}$　若有复数,复数取模.

$\rho(A)\le\|A\|$

矩阵条件数.

$$Cond(A)\triangleq\|A\|\|A^{-1}\|$$

常用

(1) $Cond_\infty(A)=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty$

(2) $Cond_2(A)=\|A\|_2\|A^{-1}\|_2=\sqrt{\dfrac{\lambda_{max}(A^TA)}{\lambda_{min}(AA^T)}}$

A是对称矩阵时　$Cond_2(A)=\dfrac{|\lambda_1|\ max}{|\lambda_n|\ min}.$

条件数大 —— "病态"矩阵

条件数小 —— "良态"矩阵.

第3章 解线性方程组的迭代法

迭代方法

$$\underset{n\times n}{A}\underset{n\times 1}{x}=b \qquad \{x^k\}\to x^* \quad \text{给定初值 } x_{(0)} \xrightarrow{\text{逼近}} x^*$$

大型 稀疏线性方程组 — 含有大量0元素

Gauss-消去法 存储 $O(n^2)$ 计算 $O(\frac{n^3}{3})$

$$B=\begin{pmatrix} x & x & x & \cdots & x \\ x & x & & & \\ x & & x & & O \\ \vdots & & & \ddots & \\ x & & O & & x \end{pmatrix} \qquad B\cdot x=\begin{pmatrix} \beta_{11}x_1+\beta_{12}x_2+\cdots+\beta_{1n}x_n \\ \beta_{21}x_1+\beta_{22}x_2 \\ \vdots \\ \beta_{n1}x_1+\beta_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

存储 $O(n)$ $O(k\cdot(3n-2))$

$n+2(n-1)=3n-2$ 次乘法.

$$\underset{n\times n}{A}\underset{n\times 1}{x}=\underset{n\times 1}{b} \iff x=\underset{n\times n}{B}x+g. \Rightarrow \forall x^{(0)} \quad x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g.$$

若 $\{x^k\}\to x^*$ $x^*=Bx^*+g$.

① 如何构造 B, g.
② $\{x^{(k)}\}$ 收敛否?
③ $\{x^{(k)}\}$ 收敛性与 $x^{(0)}$ 相关否.
④ $\|x^*-x^{(k)}\|\le\varepsilon$

$$A=D-\overset{\text{左下}}{E}-\overset{\text{右上}}{F}$$

Jacobi

$Ax=b$

$(D-E-F)x=b$

$Dx=(E+F)x+b$

$$\Rightarrow \boxed{x^{(k+1)}=\underbrace{D^{-1}(E+F)}_{B}x^{(k)}+\underbrace{D^{-1}b}_{g}}$$

Gauss-Seidel

$Ax=b$

$(D-E-F)x=b$

$\Rightarrow (D-E)x=Fx+b$

$(D-E)x^{(k+1)}=Fx^{(k)}+b$

$$\Rightarrow \boxed{x^{(k+1)}=\underbrace{(D-E)^{-1}F}_{B}x^{(k)}+\underbrace{(D-E)^{-1}b}_{g}}$$

$Dx^{(k+1)}=Ex^{(k+1)}+Fx^{(k)}+b$

SOR. $Dx^{(k+1)}=(1-w)Dx^{(k)}+w(Ex^{(k+1)}+Fx^{(k)}+b)$

$$\Rightarrow \boxed{(D-wE)x^{(k+1)}=[(1-w)D+wF]x^{(k)}+wb}$$

$$x^{(k+1)}=(D-wE)^{-1}[(1-w)D+wF]x^{(k)}+w(D-wE)^{-1}b$$

定理 3.3.1 $\|B\|<1 \Longrightarrow \{x^{(k)}\}$ 收敛于 x^*

$\frac{\|B\|}{1-\|B\|}\|x^{(1)}-x^{(0)}\| \leq \varepsilon$

$k \ln\|B\| \leq \ln \frac{\varepsilon\cdot(1-\|B\|)}{\|x^{(1)}-x^{(0)}\|}$

$\underline{k} \geq \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-\|B\|)}{\|x^{(1)}-x^{(0)}\|}}{\ln\|B\|}$

N

for $\cdot k=1,2\cdots N$

$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$.

if (____ $<\varepsilon$) break

可在每步后检验.

可估算 k.

误差估计

$\|x^*-x^{(k)}\| \leq \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\underline{\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|}$

$\|x^*-x^{(k)}\| \leq \frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$

定理 3.1.2

设 $B\in R^{n\times n}$ 则

$\lim_{k\to\infty} B^k=0$

$\Updownarrow$

$\rho(B)<1$

○ 定理 3.3.2. $\forall x^{(0)}$, $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$

$\{x^{(k)}\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ (1) $B^k\to 0\ (k\to\infty)$

(2) $\rho(B)<1$

迭代矩阵.

推论 3.3.1 SOR 收敛 $\Longrightarrow 0<\omega<2$

做题时,可移动行,看是否可变成严格对角占优

(严格对角占优必可逆
非奇异).

引理 3.3.1 $\underset{\sim}{A \text{ 严格}}$ 对角占优, $0<\omega\leq 1$, $|\lambda|\geq 1$

$\Rightarrow (\lambda+\omega-1)D-\lambda\omega E-\omega F$ 严格.

○ 推论 3.3.2. $\underset{\sim}{A \text{ 严格}} \Rightarrow$ Jacobi, G-S, $0<\omega\leq 1$ 的 SOR 收敛

○ 推论 3.3.3 <u>A 对称正定</u>

Jacobi 收敛 $\Longleftrightarrow$ $2D-A$ 对称正定.

○ 推论 3.3.4. <u>A 对称正定</u>

SOR 收敛 $\Leftrightarrow 0<\omega<2$

G-S 是 SOR $\omega=1$ 的特例

3.4 共轭梯度法

$f(x)=\frac{1}{2}x^TAx-b^Tx$ 极小点 $\Longleftrightarrow$ A对称正定，$Ax=b$ 的解 x^*

$\nabla f(x)=Ax-b$

~~最速下降法~~

泰勒：$f(x^{k+1})=f(x^k)+\underbrace{\nabla f(x^k)^T\cdot(x^{k+1}-x^k)}_{\alpha_k p^k}+O(\|x^{k+1}-x^k\|)$

$f(x^{k+1})\le f(x^k)$ $\quad p^{(k)}=-\nabla f(x^k)=b-Ax^{(k)}=r^{(k)}$

$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha_k p^{(k)}$ s.t. $f(x^{(k+1)})=\min\limits_{\alpha\in R}f(x^{(k)}+\alpha p^{(k)})$

最速下降法

已知 $x^{(0)}$，求 $x^{(k+1)}$

$p^{(k)}=-\nabla f(x^{(k)})=b-Ax^{(k)}=r^{(k)}$

$f(x^k+\alpha_k p^{(k)})=\min\limits_{\alpha}f(x^k+\alpha p^{(k)})$

$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha_k p^{(k)}$

共轭梯度法

$x^{(0)}$ $d^{(0)}=r^{(0)}=-\nabla f(x^0)=b-Ax^{(0)}$

已知 $x^{(k)}$，$r^{(k)}$，$d^{(k)}$ 求 $x^{(k+1)}=?$

$\Rightarrow \alpha_k=\frac{(r^{(k)},d^{(k)})}{(d^{(k)},Ad^{(k)})}\Longrightarrow x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha_k d^{(k)}$

$\Rightarrow r^{(k+1)}=b-Ax^{(k+1)}\Longrightarrow d^{(k+1)}=\cancel{\beta_k d^{(k)}}\ r^{(k+1)}+\beta_k d^{(k)}$

β_k：$(d^{k+1},Ad^k)=0\Rightarrow \beta_k=-\frac{r^{(k+1)T}Ad^{(k)}}{d^{(k)T}Ad^{(k)}}$

非零残向量　　搜索方向

定理3.4.3　$r^{(i)}$，$d^{(i)}$

(1) $(r^{(k)}, d^{(k-1)}) = 0$;

(2) $(r^{(k)}, d^{(k)}) = (r^{(k)}, r^{(k)})$

(3) $r^{(0)}, \cdots, r^{(k)} (k \le n+1)$ 是正交向量组

$d^{(0)}, \cdots, d^{(k)} (k \le n-1)$ 是关于A的共轭向量组.

证(1) $(r^{(k)}, d^{(k-1)}) = (b - Ax^{(k)}, d^{(k-1)}) = (b - A(x^{(k-1)} + \alpha_{k-1} d^{(k-1)}), d^{(k-1)})$

$= (\underline{r^{(k-1)} - \alpha_{k-1} A d^{(k-1)}}, d^{(k-1)})$

---

(2) $d^{(k)} = r^{(k)} + \beta_{k-1} d^{(k-1)}$

$(r^{(k)}, d^{(k)}) = (r^{(k)}, r^{(k)} + \beta_{k-1} d^{(k-1)})$

$= (r^{(k)}, r^{(k)}) + \beta_{k-1} \underline{(r^{(k)}, d^{(k-1)}) = 0}$

$= (r^{(k)}, r^{(k)})$

$\because$ $r^{(k)} = r^{(k-1)} - \alpha_{k-1} A d^{(k-1)} \Rightarrow r^{(k-1)} - r^{(k)} = \alpha_{k-1} A d^{(k-1)}$

$\Rightarrow (r^{(k)}, d^{(k-1)}) = (r^{(k-1)}, d^{(k-1)}) - \alpha_{k-1} (A d^{(k-1)}, d^{(k-1)}) = 0$

$$\alpha_{k-1} = \frac{(r^{(k-1)}, d^{(k-1)})}{(d^{(k-1)}, A d^{(k-1)})}$$

$$\beta_k = -\frac{(r^{(k+1)}, A d^{(k)})}{(d^{(k)}, A d^{(k)})} = \frac{\|r_{k+1}\|_2^2}{\|r_k\|_2^2} \qquad \alpha_k = \frac{\|r^{(k)}\|_2^2}{(d^{(k)}, A d^{(k)})}$$

$$\alpha_k = \frac{r^{(k)T} r^{(k)}}{d^{(k)T} A d^{(k)}} = \frac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(d^{(k)}, A d^{(k)})}$$

$$\beta_k = \frac{r^{(k+1)T} r^{(k+1)}}{r^{(k)T} r^{(k)}} = \frac{(r^{(k+1)}, r^{(k+1)})}{(r^{(k)}, r^{(k)})}$$

步骤.

$d^{(0)} = r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$

步长 α_k - 给定方向求步长

$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$

$r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)}$

β_k

方向 $d^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta_k d^{(k)}$

第4章 插值法

构造 $f(x)$ 的简单近似表达式 $P(x)$

4.1 多项式插值问题

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

插值条件：$P_n(x_i) = y_i,\quad i = 0, 1, \cdots, n.$

定理4.1.2（截断误差估计式）

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

对任意 x_i 有 $R_n(x_i)=0$ 所以有 $(x-x_0)\cdots(x-x_n)$

记 $\pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ $\quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x)$

证明：

$a\ x_0\ \ x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \cdots\ x_{n-1}\ \ x_n\ b$

$\varphi'(\xi_1)=0 \quad \varphi'(\xi_2)=0 \quad \Rightarrow \phi'(t)$ 有 $n+1$ 个0点

$\Rightarrow \phi''(t)$ 有 n 个0点

$R_n(x) = k(x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ $\quad \Rightarrow \phi^{(n+1)}(\xi)$ 有1个0点

$\phi(t) = R_n(t) - k(x)(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n) \Rightarrow \phi^{(n+1)}(\xi) = 0$

$\Rightarrow R_n^{(n+1)}(\xi) - k(x)(n+1)!$

4.2 拉格朗日插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} y_i$$

令 $\pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

$\pi'_{n+1}(x_i) = (x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)$

拉
$$\begin{cases} L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{\pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\pi'_{n+1}(x_i)} y_i. \\ R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \end{cases}$$

一种思路：$(x_0, y_0), (x_1, y_1) \Rightarrow P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

$$= y_0\left[1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right] + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$= y_0 \underbrace{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}}_{l_0(x)} + y_1 \underbrace{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}_{l_1(x)}.$$

$\Rightarrow l_0(x_0) = 1, \quad l_0(x_1) = 0 \quad | \quad l_1(x_0) = 0, \quad l_1(x_1) = 1.$

$P_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$

$(x_0, y_0), (x_1, y_1) \cdots (x_n, y_n) \Rightarrow P_n(x) = y_0 \tilde{l}_0(x) + y_1 \tilde{l}_1(x) + \cdots + y_n \tilde{l}_n(x)$

$$\tilde{l}_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

$\tilde{l}_i(x)$ 具有 n 个 0 点：$x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots x_n$.

$\Rightarrow \tilde{l}_i(x) = \alpha_i (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)$

$\tilde{l}_i(x_i) = 1 \Rightarrow \alpha_i = 1 / (x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)$

$\Rightarrow \tilde{l}_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \quad i = 0, 1, \cdots, n.$

记 $\pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$

$\Rightarrow \pi_{n+1}'(x)\big|_{x = x_i} = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)$

$\Rightarrow \tilde{l}_i(x) = \frac{\pi_{n+1}(x)}{(x - x_i)\pi_{n+1}'(x_i)}.$

4.3 牛顿插值多项式

一种思路

$(x_0, y_0) \cdots (x_{n-1}, y_{n-1}) \Longrightarrow L_{n-1}(x)$ 类似.

$+(x_n, y_n) \Longrightarrow L_n(x)$ $\qquad L_{n-1} = L_{n-2} + C_{n-1}(x-x_0)\cdots(x-x_{n-2})$

$L_n(x) = L_{n-1}(x) + Q_n(x)$

$\Rightarrow Q_n(x) = L_n(x) - L_{n-1}(x)\big|_{x=x_0, x_1, \cdots x_{n-1}} = 0.$ $\qquad L_2 = L_1 + C_2(x-x_0)(x-x_1)\big|_{x=x_2} = y_2$ $\quad y_1$

$\cdots\cdots$

$\Rightarrow Q_n(x) = C_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$

$\Rightarrow L_n = L_{n-1} + C_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\big|_{x=x_n} = y_n.$

牛顿插值多项式

$$N_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots$$
$$+ f[x_0, x_1, \cdots, x_k](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}) + \cdots$$
$$+ f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$n+1$个节点，不超过n次.

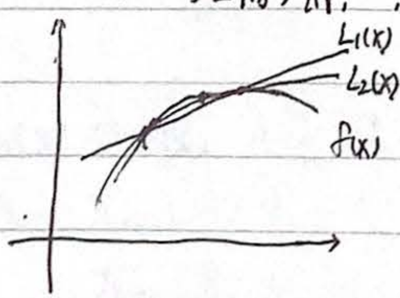
截断误差估计式.

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x)$$
$$= f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

(便于记－第$n+2$个节点为x，$R_n(x)$为$N_n(x)$第$n+1$项，后面是$\pi_{n+1}(x)$).

差商的性质

1. $f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{f(x_i)}{\pi'_{n+1}(x_i)}$



$$\pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\pi'_{n+1}(x_i)}$$

$L_n(x)$的n次项系数. $\sum_{i=0}^{n} y_i / \pi'_{n+1}(x_i)$

2、 差商与节点的次序无关.

3、 (差商与导数的关系).

$$f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$ 其中ξ介于$x_i, x_{i+1}, \cdots x_{i+k}$之间

(便记. k+1个节点的k阶差商)

例: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 已知 $f[0,1,t] = 1$ 求$f[1,2,t] = 3$.

$$\frac{f[1,2,t] - f[0,1,t]}{2-0} = f[0,1,2,t] = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} = 1$$

$\Rightarrow f[1,2,t] = 3$.

性质: 若 $f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = g[x_0 \cdots x_n] + h[x_0 \cdots x_n]$

例: $f(x) = x^3 + 2021x + a$ 求$f[0,1,2]$.

记 $g(x) = x^3 \quad h(x) = 2021x + a$.

$\Rightarrow f[0,1,2] = g[0,1,2] + h[0,1,2]$.

$$h[0,1,2] = \frac{h''(\xi)}{2!} = 0.$$

x	$g[x_i]$	$g[x_i, x_{i+1}]$	$g[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	0		
1	1	1	
2	8	7	3

$\Rightarrow f[0,1,2] = 3$.

4. $$f[x_i, x_i, \cdots, x_i] = \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}$$

5. (差商的导数) $$\frac{df[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x]}{dx} = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

其中 ξ 介于 $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x$ 之间

证. $$\frac{df(x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x]}{dx} = \lim_{x_k \to x} \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x]}{x_k - x}$$

$$= \lim_{x_k \to x} f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k, x]$$

差商的导数 $= \lim_{x_k \to x}$ 高阶差商

$$= \lim_{x_k \to x} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

$$\frac{d\left(\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}\right)}{dx} = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

$$\frac{d^2 f(x_0, \cdots, x_{k-1}, x)}{d^2 x} = \frac{d}{dx} f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x, x]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0, \cdots, x_{k-1}, x+\Delta x, x+\Delta x] - f[x_0, \cdots, x_{k-1}, x+\Delta x, x]}{\Delta x}$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f[x_0, \cdots, x_{n-1}, x+\Delta x+x] - f[x_0, \cdots, x_{k-1}, x, x]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f[x_0, \cdots, x_{k-1}, x+\Delta x, x, x+\Delta x] + \lim_{\Delta x \to 0} f[x_0, \cdots, x_{k-1}, x, x, x+\Delta x]$$

$$= 2f[x_0, \cdots, x_{k-1}, x, x, x] = 2 \cdot \frac{f^{(k+2)}(\xi)}{(k+2)!}$$

6. 设 $f(x)$ 是 n 次多项式，则一阶差商 $f[x_0, x]$ 是 x 的 $n-1$ 次多项式，

二阶差商是 x 的 $n-2$ 次多项式

性质3 $\longrightarrow$ 当 $k \le n$ 时，$f(x)$ 的 k 阶差商是 x 的 $n-k$ 次多项式

n阶差商至几次. 当 $k > n$ 时，k 阶差商 $f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x] \equiv 0$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$f[x_0, x] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i (x^i - x_0^i)}{x - x_0}$$

$$x^i - x_0^i = (x - x_0)\underbrace{[\cdots]}_{i-1\text{次}}$$

$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x)$

知其两项可求第三项

例 $f(x) = x^5 + 2021x^3 + 10x + 22$，以 $-2, -1, 0, 1, 2$ 为节点，不超过4次的插值多项式 $L_4(x) = $ ______

这个4阶差商是 x^4 的系数，而 $f(x)$ 中 x^4 的系数为0. $\leftarrow f[-2,-1,0,1,2] = \underline{0}$

一种思路

$f(x) - L_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)$

$\Rightarrow L_4(x) = f(x) - \frac{5!}{5!}x(x^2-1)(x^2-4)$

$= x^5 + 2021x^3 + 6x + 22 - [x^5 - 5x^3 + 4x]$

$= 2026x^3 + 6x + 22$ ✓.

P126. 例 设.

x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	0	-4	$\bigcirc$ → 未给出.
$f'(x_i)$		0	5
$f''(x_i)$		6.	

求4次插值多项式.

用前面 $N_3(x) + f'(1) = 5 \Rightarrow N_4(x)$

$N_4(x) = N_3(x) + \underline{Q_4(x)}$ → 不超过4次

$Q_4(x) = \underbrace{N_4(x) - N_3(x)}_{\text{满足前面4个条件}} = \underbrace{C_4(x+1)x^3}_{\text{因式分解}}.$

$Q_4(x)|_{x=} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} N_4(x) = N_3(x) + C_4(x+1)x^3. \\ N_4'(1) = f'(1) = 5 \end{cases} \Rightarrow C_4 = \cdots \Rightarrow N_4(x)$

4.4 埃尔米特插值多项式

考虑导数

一、牛顿型 （设有k+1个数据，一般则是k阶）

$f(x_i)$，$f'(x_i)$，$f''(x_i)$

① x_i | 在x_i有几个数据 就写几阶 　　也就要知道

② 利用 $f[\underbrace{x_i \cdots x_i}_{k+1个}] = \dfrac{f^{(k)}(x_i)}{k!}$

二、拉格朗日型

构造方法：$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} h_i(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^{n} \bar{h}_i(x) f'(x_i)$

思想

$h_i(x_j) = \begin{cases} 1, & j=i \\ 0, & j\neq i \end{cases}$ 　　$h_i'(x_j) = 0$ 　$\Rightarrow$ x_j（除x_i）是$h_i(x)$的 2重零点

$\bar{h}_i(x_j) = 0$， 　　$\bar{h}_i'(x_j) = \begin{cases} 1, & j=i \\ 0, & j\neq i \end{cases}$ $\Rightarrow$ x_i是$\bar{h}_i(x)$的1重零点 其余是2重零点

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n}\left[1 - 2(x-x_i)\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i - x_j}\right] l_i^2(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^{n}(x-x_i) l_i^2(x) f'(x_i).$$

截断误差估计式为

$$R_{2n+1}(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2.$$

$n=1$时 　三次埃尔米特插值多项式

$$H_3(x) = \left(1 + 2\frac{x_0 - x}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 f(x_0) + \left(1 + 2\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 f(x_1)$$
$$+ (x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 f'(x_0) + (x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 f'(x_1).$$

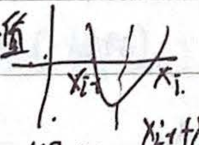
$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2.$$

4.5 分段低次插值多项式.

1. 分段线性插值. (1阶)

$$|f(x)-N_{1,i}(x)| = \left|\frac{f''(\xi_i)}{2}\right| |(x-x_{i-1})(x-x_i)| \qquad x\in[x_{i-1},x_i]$$

$$\le \frac{M_2}{2}\underbrace{|(x-x_{i-1})(x-x_i)|}\ \xrightarrow{\text{求最值}}$$



左右那样.

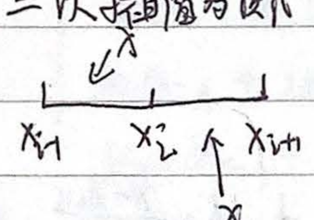
$$\le \frac{M_2}{2}\cdot\frac{h_i}{2}\cdot\frac{h_i}{2}$$

$$= \frac{M_2}{8}h_i^2$$

得 $x=\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$

$x_i-x_{i-1}=h_i$

2. 分段二次插值多项式



后1过.

$$|(x-x_{i-1})(x-x_i)||(x-x_{i+1})|$$

$$\le \frac{1}{4}h_i^2(h_i+h_{i+1}) \le \frac{1}{4}h^2(h+h) \quad \text{最大长度}$$

$$= \frac{1}{2}h^3$$

$$R_2 = \frac{f'''(\xi)}{3!}\frac{1}{2}h^3 \le \frac{h^3}{12}M_3$$

3. 分段三次埃尔米特插值多项式 $\quad |R_{3,i}(x)| \le \dfrac{h^4}{384}M_4 \qquad \dfrac{M_4}{4!}\left(\dfrac{h_i^2}{4}\right)^2 \quad \left(\dfrac{h}{2}\right)^2$

4.6 三次样条插值函数

定义: $[a,b]$上 $n+1$个节点 x_i $(i=0,\cdots,n)$ $\quad y_i=f(x_i)$ $(i=0,1,\cdots,n)$

若 $S(x)$ 满足

(1) $[x_{i-1},x_i]$ 上, $S(x)$ 是三次多项式

(2) $S(x_i)=y_i$ $(i=0,1,\cdots,n)$ $\qquad$ 由定义得

(3) $[a,b]$上, $S''(x)$ 连续. $\qquad$ $S(x)$ 是分段三次多项式

$$\begin{cases} S_-(x_i)=S_+(x_i) \\ S_-'(x_i)=S_+'(x_i) \qquad i=1,2,\cdots n-1 \\ S_-''(x_i)=S_+''(x_i) \end{cases}$$

思路.

$S(x)=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3 \Rightarrow$ 4个未知 $\Rightarrow$ n个区间, 4n个未知数.

函数值　　左右连续

$(n+1)+3(n-1) \Rightarrow 4n-2$ 个方程.

$+$ 2个边界条件 $\Rightarrow$ 2个方程.

① 左右边界点处的二阶导数.
② .... 一阶 ..
③ 周期边界条件.

设 $S''(x_i)=M_i$, $i=0,1,\cdots,n$.

x_{i-1} x_i
M_{i-1} M_i

$$S''(x)=M_{i-1}\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}+M_i\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}$$

(S(x)的二阶导为一直线 在每段区域内)

$S''(x)$ 积分2次 $\Rightarrow$ $S(x)$ (含2个积分常数. b_i, c_i)

利用 $S(x_{i-1})=y_{i-1}$, $S(x_i)=y_i$ $\xrightarrow[c_i]{求出\ b_i}$ $S(x)$ (含 M_i, $i=0,1,\cdots N$).

x_{i-1} x_i x_{i+1}　$+$ $S'_-(x_i)=S'_+(x_i)$ —— n-1个方程.
$+$2个边界条件.

$(x_{i-1}\le x\le x_i)$

$$S(x)=\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}M_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}M_i+\underbrace{\left(y_{i-1}-\frac{h_i^2}{6}M_{i-1}\right)}_{b_i}\frac{x_i-x}{h_i}+\underbrace{\left(y_i-\frac{h_i^2}{6}M_i\right)}_{c_i}\frac{x-x_{i-1}}{h_i}$$

$h_i=x_i-x_{i-1}$

$$S'_-(x_i)=\frac{h_i}{6}M_{i-1}+\frac{h_i}{3}M_i+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}$$

$S'_-(x_i)=S'_+(x_i)$

$$S'_+(x_{i-1}) \Rightarrow S'_+(x_i)=-\frac{h_{i+1}}{3}M_i-\frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}$$

$h_i = x_i - x_{i-1}$

$$\underset{x_{i-1}}{|}\overset{h_i}{\longrightarrow}\underset{x_i}{|}\overset{h_{i+1}}{\longrightarrow}\underset{x_{i+1}}{|}$$

$$\boxed{\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i} \quad i=1,2,\cdots,n-1$$

$\mu_i = \frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}$ $\quad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}} = 1-\mu$ $\quad d_i = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$ $i=1,2,\cdots n-1$

边界条件

①. $M_0 = f''(a) \quad M_n = f''(b)$ 消去M_0, M_n.

n-1个 $\begin{cases} 2M_1 + \lambda_1 M_2 = d_1 - \mu_1 M_0 \\ \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \quad i=2,3,\cdots,n-2 \\ \mu_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} = d_{n-1} - \lambda_{n-1} M_n. \end{cases}$

矩阵. $\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 M_0 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} M_n \end{bmatrix}.$

严格三对角占优 $\longrightarrow$ 追赶法. $M_0 = M_n = 0$ 时 $S(x)$ 自然三次样条插值函数.

② $S'_+(x_0) = y'_0 = f'(a)$ $\quad S'_-(x_n) = y'_n = f'(b)$

代入 $S'_+(x_i)$ 和 $S'_-(x_n)$ 公式中. 可得2式.

n+1个式子 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \mu_{n-1} 2 & \lambda_{n-1} \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$ 严格三对角.

$d_0 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0\right) = 6f[x_0, x_0, x_1]$

$d_n = \frac{6}{h_n}\left(y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right) = 6f[x_{n-1}, x_n, x_n]$

③ 周期.

$$\underset{x_0}{|}\;\underset{x_1}{|}\;\underset{x_2}{|}\;\cdots\;\underset{x_{n-1}}{|}\;\underset{\substack{x_n\\x_0}}{|}\;\underset{\substack{x_{n+1}\\x_1}}{|}$$

$M_0 = M_n$ 消去M_0

$\mu_n M_{n-1} + 2M_n + \lambda_n \underbrace{M_{n+1}}_{M_1} = d_n.$ $\quad d_n = \frac{6}{h_n+h_1}\left(\frac{y_1 - y_n}{h_1} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right)$

$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$

严格.

第5章 函数最优逼近

5.1 函数的内积、范数和正交多项式

1、 函数 $\phi_0(x), \phi_1(x), \cdots, \phi_n(x) \in V \subset C[a,b]$，$c_i \in R\ (i=0,1,\cdots,n)$

$$c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0 \quad \forall x \in R.$$

当且仅当 $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$ 时成立，则 $\phi_0(x), \cdots, \phi_n(x)$ 线性无关.

$\forall p(x) \in V \quad p(x) = c_0\phi_0(x) + \cdots + c_n\phi_n(x)$ — 广义多项式

线性子空间

$$V = span\{\phi_0(x), \phi_1(x), \cdots, \phi_n(x)\}$$

$$H_n = span\{1, x, x^2, \cdots, x^n\} \quad \phi_i(x) = x^i$$

内积：

列表函数.	连续函数. 区间 $[a,b]$
$(f,g) = \sum_{i=1}^{m} w_i f(x_i) g(x_i)$	$(f,g) = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx$
权系数	$w(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上.
$w_i > 0$	$w(x) \geq 0$

若未给出 w，默认 $w=1$

性质：(1) $(f,g) = (g,f)$

(2) $\forall \alpha \in R,\ (\alpha f, g) = \alpha (f,g)$

(3) $(f+h, g) = (f,g) + (h,g)$

(4) $(f,f) \geq 0,\ (f,f) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0.$

范数：

列表函数：$\|f(x)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} w_i f^2(x_i)\right)^{1/2} = \sqrt{(f,f)}$

连续函数：$\|f(x)\|_2 = \left(\int_a^b w(x) f^2(x) dx\right)^{1/2}$ //

区间 $[a,b]$ $\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ （∞ 范数）

$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$ （1 范数）

2. 正交多项式

(1) 列表函数：$(f,g)=\sum_{i=1}^{m} w_i f(x_i)g(x_i)=0$　f, g 关于 w_i 正交.

(2) 连续函数：$[a,b]$上　$(f,g)=\int_a^b w(x)f(x)g(x)dx=0$

f, g 在 $[a,b]$ 上关于 $w(x)$ 正交.　$[a,b]$ 为正交区间.

若函数族 $g_0(x), g_1(x), \cdots, g_k(x), \cdots$ 满足：

$$(g_i, g_j)=\begin{cases}0, & j\neq i\\ \gamma_i>0, & j=i\end{cases}$$

称 $\{g_k(x)\}$ 为正交函数族，若 $\gamma_i\equiv1$，则称为标准正交函数族.

当 $\{g_k(x)\}$ 是 k次 多项式，简称 $g_0(x), g_1(x), \cdots, g_k(x)$ 为正交多项式

性质：

1) 正交多项式 $\{g_k(x)\}$ 线性无关

推论：k次多项式 $P_k(x)$ 与 n次正交多项式 $g_n(x)$ 正交 $(k<n)$

2) 在正交区间 $[a,b]$ 或 $[\min x_i, \max x_i]$ 上，n $(n\geq1)$ 次正交多项式 $g_n(x)$ 恰有 n个不同的实重根 实根.

3) 设 $g_0(x), g_1(x), \cdots, g_k(x), \cdots$ 是最高次项系数为1的正交多项式，则有三项递推关系.

$$g_{k+1}(x)=(x-b_k)g_k(x)-c_k g_{k-1}(x),\quad k=1,2,\cdots$$

其中 $b_k=\frac{(xg_k, g_k)}{(g_k,g_k)}=\frac{\beta_k}{\gamma_k}$ | $c_k=\frac{(g_k,g_k)}{(g_{k-1},g_{k-1})}=\frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}$

$g_0(x)=1$

$g_1(x)=x-\frac{\beta_0}{\gamma_0}$

$=x-\frac{(xg_0,g_0)}{(g_0,g_0)}$

$g_0=1$　$g_1=x-b_0=x-\frac{(xg_0,g_0)}{(g_0,g_0)}$

$g_0=1$　$g_1=x-\frac{1}{2}$　$g_2=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{12}$
$=x^2-x+\frac{1}{6}$

区间为[0,1]

不通用，区间不一样. T_T

常用的正交多项式

(1) 三角函数系.

原

$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$ legendre

(2) 勒让德(legendre)多项式.

$$P_k(x)=\frac{1}{2^k k!}\frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k},\quad k=0,1,2,\cdots$$

区间 $[-1,1]$ 权 $w\equiv 1$

三项递推: $(k+1)P_{k+1}(x)=(2k+1)xP_k(x)-kP_{k-1}(x),\quad k=1,2,\cdots$

$P_k(x)$ 最高次 x^k 的系数为:

$$a_k=\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2}.$$

注意区间变换.

$(P_k,P_k)=\frac{2}{2k+1}$ $P_0=1$ $P_1=x$ $P_2=\frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_3=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

(3) 拉盖尔(Laguerre)多项式.

$$L_k(x)=e^x\frac{d^k(x^ke^{-x})}{dx^k},\quad k=0,1,2,\cdots$$

区间 $[0,+\infty]$ 权: $w(x)=e^{-x}$

三项: $L_{k+1}(x)=(1+2k-x)L_k(x)-k^2L_{k-1}(x)$

最高次: $a_k=(-1)^k.$

$(L_k,L_k)=(k!)^2$

(4) 埃尔米特(Hermite)多项式.

$$H_k(x)=(-1)^ke^{x^2}\frac{d^ke^{-x^2}}{dx^k},\quad k=0,1,2.$$

$(-\infty,+\infty)$ $w(x)=e^{-x^2}.$

$$H_{k+1}(x)=2xH_k(x)-2kH_{k-1}(x)\quad k=1,2,\cdots$$

$a_k=2^k.$

$(H_k,H_k)=2^k(k!)\sqrt{\pi}.$

(5) 切比雪夫 (Chebyshev) 多项式.

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x), \quad -1 \le x \le 1, \ k = 0, 1, 2, \cdots$$

性质

① 区间 $[-1, 1]$ 　权 $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

② 三项 $T_{k+1}(x) = 2x T_k(x) - T_{k-1}(x)$, $k = 1, 2, \cdots$

③ $T_k(x)$ 最高次项 $2^{k-1} x^k$ 　$T_{2k}(x)$ 只有 x 的偶次幂

$T_{2k+1}(x)$ 只含 x 的奇次幂.

④ $T_k(x)$ 在 $[-1, 1]$ 有 k 个零点.

$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2k}\pi\right)$ 　$i = 0, \cdots, k-1$ 　| $\frac{2i+1}{2k}$ 0 ~ 1 k等份

⑤ 在 $[-1, 1]$ $|T_k(x)| \le 1$ 在 $k+1$ 个极点处 $x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right)$ $(i = 0, \cdots, k)$

$T_k(x)$ 依次交替取 最大值 1 和最小值 -1

⑥ $P_n(x)$ 是最高次项为 1 的 n 次多项式.

$$\max_{-1 \le x \le 1} |P_n(x)| \ge \max_{-1 \le x \le 1} |2^{1-n} T_n(x)| = 2^{1-n}$$

5.2 最优平方逼近.

$f(x)$. 　　$P(x)$ 用基函数表示

构造广义多项式 $P(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x)$ —— ($\phi_i(x)$ —— 线性无关的函数).

使 $\|p-f\|_2^2$ 最小.

$= (p-f, \ p-f)$. 　　$P(x)$ 为 $f(x)$ 的近似表达式

$P(x)$ —— 最小二乘拟合函数 ($f(x)$ 为列表函数). 最优平方逼近函数 (f 为连续函数)

若取 $\phi_j(x) = x^j$ 则 $P(x)$ 为最小二乘拟合多项式

$$S(c_0, c_1, \cdots, c_n) = \|p-f\|_2^2$$

最优平方逼近的 正规方程组 / 法方程组: $\sum_{j=0}^{n} (\phi_k, \phi_j) c_j = (\phi_k, f)$, $k = 0, 1, \cdots, n$.

改写: $\left(\phi_k, \sum_{j=0}^{n} c_j\phi_j - f\right) = 0$, $k = 0, 1, \cdots, n$.

$(\phi_k, \ p-f) = 0$ 　$k = 0, 1, \cdots, n$. 　　$p-f$ 与所有基函数正交.

一般取 $n \le 6$

矩阵形式

对称正定矩阵

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_0,f) \\ (\varphi_1,f) \\ \vdots \\ (\varphi_n,f) \end{pmatrix}$$

可理解为 f 在 φ_i 的投影.

若 $\{\varphi_i\}$ 为正交函数（取 $g_0, g_1, \cdots g_n$.），则正规方程组简化为:

$$(g_k, g_k)c_k = (g_k, f), \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

得.

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(g_k, f)}{(g_k, g_k)} g_k(x)$$

若 $f(x)$ 为列表函数. 则正规方程组变化为 $G^TWGC = G^TWy$

$$G = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_0(x_m) & \varphi_1(x_m) & \cdots & \varphi_n(x_m) \end{pmatrix}$$

$$W = \mathrm{diag}(w_1, w_2, \cdots, w_m), \quad y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$$

当 $w_i \equiv 1$ 时，方程组为，

$$G^TGC = G^Ty$$

若取 $\varphi_i(x) = x^i \ (i = 0, 1, \cdots, n)$ 则.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & & x_m^n \end{pmatrix}$$

此时求得的最小二乘拟合多项式就是插值多项式

三种解题方法.

1) 选一组线性无关的基函数 $\phi_0(x), \cdots \phi_n(x)$ 由正规方程组得到 c_i 求出 $P(x)$

2) 利用三项递推关系,构造正交多项式. 由正规方程组简化求得

3) 作变量替换,利用已知正交多项式作为基函数.

$$
\begin{pmatrix}
\sum_{i=1}^{m} 1 & \sum_{i=1}^{m} x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{m} x_i^n \\
\sum_{i=1}^{m} x_i & \sum_{i=1}^{m} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} \\
\vdots & & & \vdots \\
 & & \cdots & \sum_{i=1}^{m} x_i^{2n}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} x_i^n y_i \end{pmatrix}
$$

第6章 数值积分与数值微分

6.1 牛顿-科茨求积公式

1、 $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p(x)dx + \int_a^b R(x)dx$$

$$I[f] = Q[f] + R[f]$$

$$I[f] = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b \underset{L_n(x)}{P(x)}\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b l_i(x)dx}_{A_i}$$

插值型求积公式

$$= \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = Q[f]$$

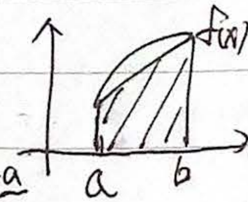
$$R[f] = I[f] - Q[f] = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n)\,dx$$

A_i 求积系数　　x_i 求积节点

$$A_i \xlongequal{x=x_0+th} \frac{(-1)^{n-i}h}{i!\times(n-i)!}\int_0^n t(t-1)\cdots(t-i+1)(t-i-1)\cdots(t-n)\,dt$$

x_i节点 $\begin{cases} \text{等距} & \text{Newton-Cotes} \\ \text{正交多项式的根} & \text{Gauss型.} \end{cases}$

2、(1) 梯型求积公式 $(n=1)$



$n=1$　$h=b-a$　$x_0=a$　$x_1=b$.

$$Q(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

$$A_0 = \int_a^b l_0(x)dx = \int_a^b \frac{x-x_1}{x_0-x_1}dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}dx = \frac{b-a}{2}$$

$$A_1 = \int_a^b l_1(x)dx = \int_a^b \frac{x-x_0}{x_1-x_0}dx = \int_a^b \frac{x-a}{a-b}dx = \frac{b-a}{2}$$

$$\Rightarrow Q(f) = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)].$$

$$R_1[f] = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta),\quad a\le\eta\le b$$

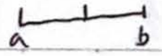
广义积分中值定理：

$f(x)$, $g(x)$ 在$[a,b]$上连续，$g(x)$在$[a,b]$上不变号，

则$\exists\, \eta\in[a,b]$使

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\eta)\int_a^b g(x)\,dx.$$

(2) 辛普森(simpson)求积公式 ($n=2$)



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx Q[f] = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

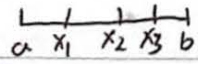
$1+4+1=6$

3值+中点的系数.

$$R_2[f] = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\eta) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta),\quad a\le\eta\le b$$

n=偶数会高一阶

(3) 科茨(Cotes)求积公式 ($n=4$)

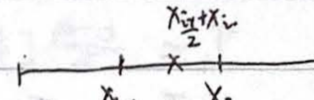


$$Q[f] = \frac{b-a}{90}\left[7f(a)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(b)\right]$$

$7+32+12+32+7=90$

$$R_4[f] = -\frac{8}{945}h^7 f^{(6)}(\eta) = -\frac{(b-a)^7}{1935360} f^{(6)}(\eta),\quad a\le\eta\le b$$

3、复化求积公式 $h=\frac{b-a}{n}$ 把区间分为若干长度相等的子区间.



(1) 复化梯形型求积公式

$$I[f] \overset{Q[f]}{\approx} \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(b)\right] \triangleq T_n$$

有相同的所以是2倍.

$$I[f]\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-x_{i-1}}{2}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]$$

$$R_{T_n}[f] = -\frac{h^3}{12}n f''(\eta) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta) \quad \eta\in[a,b]$$

(2) 复化辛普森求积公式.

$$I[f] \approx \frac{h}{6}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+4\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)+f(b)\right] \triangleq S_n$$

$$R_{S_n}[f] = -\frac{h^5}{2880}n f^{(4)}(\eta) = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta),\quad a\le\eta\le b$$

(3) 复化科茨求积公式

$$I[f] \approx \cancel{\frac{h}{90}\left[7f(x_{i-1})+32f\left(x_{i-1}+\frac{h}{4}\right)\right.}$$

$$\frac{h}{90}\left[7f(a)+14\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+12\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)+32\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i+\frac{h}{4}\right)\right.$$

$$\left.+32\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i+\frac{3h}{4}\right)+7f(b)\right] \triangleq C_n$$

$$R_{C_n}[f] = -\frac{h^7}{1935360}n f^{(6)}(\eta) = -\frac{b-a}{1935360}h^6 f^{(6)}(\eta),\quad a\le\eta\le b.$$

4、变步长积分法.

$f''(x)$在$[a,b]$上连续且变化不大时. $\frac{I[f]-T_n}{I[f]-T_{2n}} \approx 4$

$|I[f]-T_{2n}| \approx \frac{1}{3}|T_{2n}-T_n|$ 常用 $|T_{2n}-T_n| \leq \varepsilon$ 作为判别计算终止的条件

$$T_n = \frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)]$$

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$ 新增加节点数之和

$$T_{2^{k+1}} = \frac{1}{2}T_{2^k} + \frac{b-a}{2^{k+1}}\sum_{i=1}^{2^k} f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2^{k+1}}\right)$$

$$T_1 = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$|T_{2^{k+1}} - T_{2^k}| \leq \varepsilon.$$

5、龙贝格积分法 梯形公式 + 加上 误差.

$f^{(n)}$ 变化较小时

$$I[f] \approx T_{2n} + \frac{1}{4-1}(T_{2n}-T_n) = \overline{T}_{2n} = S_n$$ —辛普森

$$I[f] \approx S_{2n} + \frac{1}{4^2-1}(S_{2n}-S_n) \triangleq \overline{S}_{2n} = C_n$$ —科茨

$$I[f] \approx C_{2n} + \frac{1}{4^3-1}(C_{2n}-C_n) \triangleq \overline{C}_{2n} = R_n.$$ —龙贝格

	T $n=1$	S 2	C 4	R
误差	$C_T h^2 f''(\eta)$	$C_S h^4 f^{(4)}(\eta)$	$C_C h^6 f^{(6)}(\eta)$	$C_R h^8 f^{(8)}(\eta)$

$R_{2n} + \frac{1}{4^4-1}(R_{2n}-R_n)$ $f(x)$的高阶导很难估计.

$$\begin{tikzcd}
T & S & C & R. \\
T_1 \arrow[dr] & & & \\
T_2 \arrow[r] \arrow[dr] & S_1 \arrow[dr] & & \\
T_{2^2} \arrow[r] \arrow[dr] & S_2 \arrow[r] \arrow[dr] & C_1 \arrow[dr] & \\
T_{2^3} \arrow[r] \arrow[dr] & S_{2^2} \arrow[r] \arrow[dr] & C_2 \arrow[r] \arrow[dr] & R_1 \\
T_{2^4} \arrow[r] & S_{2^3} \arrow[r] & C_{2^2} \arrow[r] & R_{2^1}
\end{tikzcd}$$

6.2 待定系数法与高斯求积式

$$I[f] = \int_a^b w(x) f(x) dx$$

希望求积公式对尽可能多的被积函数 $f(x)$ 准确成立 即 $R[f]=0$

1、代数精度：

对某一近似式（例如数值积分公式）

$\le m$ 次多项式 $f(x)$， $R[f]=0$

$m+1$ $R[f]\ne 0$ 则精度为 m.

近似代数精度为 m. $\Longleftrightarrow$ $R[x^k]=0,\ k=0,1,2,\cdots,m,\quad R[x^{m+1}]\ne 0.$

$\sum_{i=0}^{n} A_i = b-a$ —— 检验求积系数是否准确.

待定系数法：确定代数精度及系数 A_i

节点 x_i 给定 + $R[x^k]=0,\ k=0,\cdots m \Rightarrow A_i$.

2、广义佩亚诺定理 (确定系数 A_i 后) 确定近似式的截断误差

$R[f]$ 为 $[a,b]$ 上 $m+1$ 阶导数连续的 $f(x)$ 的线性泛函.

并且近似式的代数精度为 m. 则

$$R[f(x)] = R[e(x)] \qquad f(x)\to e(x)$$

$$e(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-\tilde{x}_0)(x-\tilde{x}_1)\cdots(x-\tilde{x}_m)$$

$\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_m$ 为 $[a,b]$ 上任意点.

$R[f] = R[e] = I[e] - Q[e]$

$\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n$ 选取原则.

(1) $I(e)$ 为应用广义积分中值定理. $(x-\tilde{x}_0)(x-\tilde{x}_1)\cdots(x-\tilde{x}_m)$ 不变号

(2) 最好 $Q[e]=0$

$$I[f]=\int_a^b w(x)f(x)\,dx\approx\sum_{i=0}^{n}A_if(x_i)=Q[f]$$ $n\le m\le 2n+1$

$$A_i=\int_a^b w(x)l_i(x)\,dx,\quad i=0,1,\cdots,n.$$

3. 高斯型求积公式：（最高代数精度求积公式）$2n+1$

$2n+2$个参数 x_i, A_i → 高斯点.

选取适当的插值节点

方法：$\int_a^b w(x)x^k\,dx=\sum_{i=0}^{n}A_ix_i^k$，$k=0,1,\cdots,2n+1$

定理：求积公式代数精度 $m=2n+1\Leftrightarrow$ 节点 $x_i(i=0\cdots n)$ 为关于 $w(x)$ 正交的 $n+1$ 次正交多项式 $g_{n+1}(x)$ 的零点. 且 $A_i=\int_a^b w(x)l_i(x)\,dx$

条件：$[g_k(x)]$ 在 $[a,b]$ 上关于 $w(x)$ 正交，最高次项系数为1. x_i为 $g_{n+1}(x)$的零点

①. $A_i=\dfrac{\gamma_n}{g'_{n+1}(x_i)g_n(x_i)}$ $i=0,1,\cdots n.$ $\gamma_n=(g_n,g_n)$

②. $R[f]=\dfrac{\gamma_{n+1}}{(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\eta)$，$a\le\eta\le b$

$g_{n+1}(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$ $\gamma_{n+1}=(g_{n+1}(x), g_{n+1}(x))$

定理 高斯型求积公式的求积系数大于零.

4. 常用的4种高斯型求积公式

(1) Gauss-Legendre $x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$ 会给出 $g_{n+1}(x)$的零点，和A_i.

(2) Gauss-Laguerre

(3) Gauss-Hermite.

(4). Gauss-Chebyshev 带有奇点.

另一求 $R[f]$ 方法. $R[f]=I[f]-Q[f]$

代数精度为$m\Rightarrow R[f]=r\cdot f^{(m+1)}(\eta)$，$\eta\in[a,b]$

取$f(x)=x^{m+1}\Rightarrow I[x^{m+1}]-Q[x^{m+1}]=r\cdot(m+1)!$ 求出r.

6.3 数值积分的稳定性

舍入误差的影响，数值积分的稳定性。

$$|f(x_i)-\tilde{f}(x_i)|\le \varepsilon_i\le\varepsilon.$$

$$E=\left|\sum_{i=0}^{n}A_if(x_i)-\sum_{i=0}^{n}A_i\tilde{f}(x_i)\right|\le\sum_{i=0}^{n}|A_i|\varepsilon$$

$\sum_{i=0}^{n}A_i=\int_a^b w(x)\,dx=\gamma_0$　　当 A_i 全为正时，$\sum_{i=0}^{n}|A_i|=\gamma_0$，$E\le\gamma_0\varepsilon$

6.4 数值微分

1.两点数值微分公式 $R_n(x)=f[x_0,x_1,\cdots x_n,x]\pi_{n+1}(x)$

$n=1$ 已知 $(x_0,f(x_0))$，$(x_1,f(x_1))$，求 $f'(x_0)$，$f'(x_1)$

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)}_{L_1(x)}+\underbrace{f[x_0,x_1,x](x-x_0)(x-x_1)}_{R_1(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x)=f[x_0,x_1]+f[x_0,x_1,x,x](x-x_0)(x-x_1)+f[x_0,x_1,x](2x-x_0-x_1)$$

$$\Rightarrow f'(x_0)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}-\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-x_0)$$

$$f'(x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_1-x_0)$$

2.三点数值微分公式 $(n=2)$　　$x_i=x_0+ih\ (i=0,1,2)$ 节点等距.

(1) 求一阶导数 $(k=1)$

$$\begin{cases}f'(x_0)=\dfrac{-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)}{2h}+\dfrac{h^2}{3}f'''(\xi)\\ \boxed{f'(x_1)=\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{2h}-\dfrac{h^2}{6}f'''(\xi)}\text{ — 常用}\\ f'(x_2)=\dfrac{f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)}{2h}+\dfrac{h^2}{3}f'''(\xi)\end{cases}$$

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$$　记公式＋记 h 的几次方

(2) 求二阶导数 $(k=2)$

$$\begin{cases}f''(x_0)=\dfrac{f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)}{h^2}-hf'''(\xi)+\dfrac{h^2}{6}f^{(4)}(\bar{\xi})\\ f''(x_1)=\dfrac{f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)}{h^2}-\dfrac{h^2}{12}f^{(4)}(\bar{\xi})\text{ — 用中点计算的精度更高}\\ f''(x_2)=\dfrac{f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)}{h^2}+hf'''(\xi)+\dfrac{h^2}{6}f^{(4)}(\bar{\xi})\end{cases}$$

$$f''(x)=\frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2}-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$$

h 的选取要合适

待定系数法：与数值积分中类似.

第7章 非线性方程的迭代法

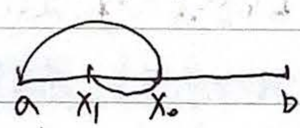
7.1 求解非线性方程的迭代法

n次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$.

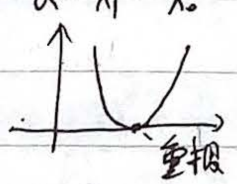
超越函数 包括了正余弦，指数等.

1、几种基本迭代法（单,实根 x^* 在 $[a,b]$内）

(1) 二分法



$f(a)\cdot f(b)<0$



已知x_k，求x_{k+1}?

误差估计 $|x^*-x_k| = \left|x^*-\frac{a_k+b_k}{2}\right| = \frac{b-a}{2^{k+1}} < \varepsilon$.

常用于求根的大体范围或求一个初始点.

(2) 简单迭代法

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \quad k=0,1,2,\cdots, \quad \phi(x)\text{称为迭代函数}$$

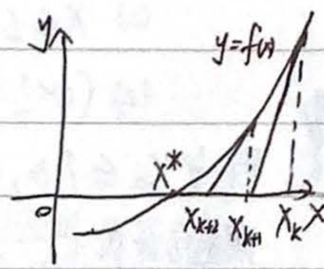
若 x^* 满足 $x^* = \phi(x^*)$ 则称 x^* 为 $\phi(x)$ 的不动点.

(3) 牛顿法. (依赖初值)

用泰勒展开

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可微 且 $f'(x) \neq 0$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0,1,2,\cdots$$



注意: $f(x)$

改进1.

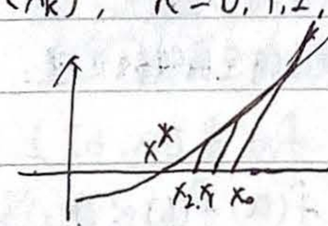
$$x^* \approx x_k + \frac{-f'(x_k) \pm \sqrt{f'^2(x_k) - 2f(x_k)f''(x_k)}}{f''(x_k)}$$

泰勒展开到三阶.去掉3次项

改进2.

$y=f(x)$ 反函数 $x=g(y)$ 泰勒展开到2阶.去掉3次项.

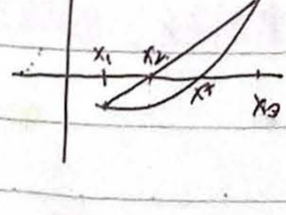
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{f''(x_k)}{2f'^3(x_k)} f^2(x_k), \quad k=0,1,2,\cdots,$$



简化: $f'(x_k) = f'(x_0)$ 或 C.

下山 λ $x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

(4) 弦割法 (单、双点)



改进. $y=f(x)$ 反 $\rightarrow$ $x=g(y)$ 作二次牛顿插值.

牛顿法中 $f'(x_k)$ 用两点连线斜率表示.

~~回~~ 回答一个迭代是否收敛时，必须说明用什么初值，收敛于哪一个解.

2、迭代法的收敛性

定义：局部收敛 $\{x \mid |x-x^*| \le \delta, \delta>0\}$ $\forall x_0 \in N_\delta(x^*)$ $\{x_k\} \to x^*$

全局收敛 $[a,b]$，$\forall x_0$ $\{x_k\}$ 收敛 x^*

1) 简单迭代法的收敛性

收敛定理：$\phi(x)$ 一阶连续可微，且满足 迭代函数 $\phi(x)$

(1) $x \in [a,b]$，$\phi(x) \in [a,b]$ 映内性

(2) $(0<L<1)$，$\forall x \in [a,b]$，$|\phi'(x)| \le L < 1$ 压缩性

充分条件 则 $\forall x_0 \in [a,b]$ 由 $x_{k+1} = \phi(x_k)$ 得 $\{x_k\} \to x^*$ $[a,b]$上唯一不动点

误差估计式

$$|x^*-x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| < \varepsilon$$

局部收敛定理

$\phi(x)$ 在 x^* 的邻域 $[x^*-\delta, x^*+\delta]$ 内连续可微，

且 $\exists 0<L<1$ 使 $|\phi'(x)| \le L < 1$ $\forall x \in [x^*-\delta, x^*+\delta]$

$\Rightarrow \forall x_0 \in [x^*-\delta, x^*+\delta]$，$\{x_k\} \to x^*$

2) 牛顿法的收敛性

牛顿法的全局收敛定理：$f(x)=0$.

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可微，并且

(1) $f(a)f(b)<0$ 存在 存在性

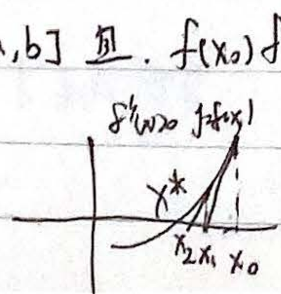
(2) $f'(x) \ne 0$，$\forall x \in [a,b]$ 严格单调性

(3) $f''(x)$ 不变号，$\forall x \in [a,b]$：凹向不变

(4) 初始点 $x_0 \in [a,b]$ 且 $f(x_0)f''(x_0)>0$ $\{x_k\}$ 单侧逼近，切线在$f(x)$的一侧

则 牛顿 $\{x_k\} \to x^*$

$[a,b]$上唯一



3）弦割法的收敛性

弦割法的局部收敛性定理：$f(x)$ 在 x^* 邻域二阶连续可微，$f'(x^*) \neq 0$

取初始 x_0, x_1 充分接近 x^*，则由弦产生的 $\{x_k\} \to x^*$

全局收敛性定理：牛顿全局收敛的条件下，取 $x_1 \in [a, b]$ 使 $f(x_1) f''(x_1) < 0$，

〃 — — 〃 $\{x_k\} \to x^*$

3、迭代法的收敛速度

p 阶收敛　渐近误差常数

定义：$\{x_k\} \to x^* \Rightarrow p \geq 1,\ c > 0,\ \lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|^p} = c \neq 0$

收敛阶定理：迭代函数 $\phi(x)$ 在 x^* 邻域内有连续的 p（$p>0$）阶导数，

则由 $x_{k+1} = \phi(x_k)$ 产生的 $\{x_k\}$ p 阶收敛 —

$\Leftrightarrow \phi'(x^*) = \phi''(x^*) = \cdots = \phi^{(p-1)}(x^*) = 0,\ \phi^{(p)}(x^*) \neq 0$

1）简单迭代法 —— 线性收敛

当 $0 < |\phi'(x^*)| < 1$ 时，$x_{k+1} = \phi(x_k)$ 线性收敛。

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|} = |\phi'(x^*)| \Leftarrow \left(\lim_{k \to \infty} |\phi'(\xi_k)| \right)$$

2）牛顿法 —— 二阶收敛

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶连续可微且 $f'(x) \neq 0$。

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|^2} = \frac{1}{2} \frac{|f''(x^*)|}{|f'(x^*)|} \neq 0 \qquad \left(\lim_{k \to \infty} \frac{1}{2} \frac{|f''(\xi_k)|}{|f'(x_k)|} \right)$$

3) 弦割法超线性收敛.

牛顿插值

相减 $\begin{cases} 0 = f(x^*) = f(x_k) + f[x_k, x_{k+1}](x^* - x_k) + f[x_k, x_{k-1}, x^*](x^* - x_k)(x^* - x_{k-1}) \\ 0 = f(x_k) + f[x_k, x_{k-1}](x_{k+1} - x_k) \end{cases}$

$\Rightarrow f[x_k, x_{k+1}](x^* - x_{k+1}) = -f[x_k, x_{k-1}, x^*](x^* - x_k)(x^* - x_{k-1})$

$\Rightarrow x^* - x_{k+1} = \dfrac{-f[x_k, x_{k-1}, x^*]}{f[x_k, x_{k+1}]}(x^* - x_k)(x^* - x_{k-1})$

$\Rightarrow |x^* - x_{k+1}| = \left|\dfrac{-\frac{1}{2}f''(\eta_k)}{f'(\xi_k)}\right| |x^* - x_k| |x^* - x_{k-1}|$

$\Rightarrow \underbrace{\dfrac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|^p}}_{\downarrow \; c} = \underbrace{\dfrac{|f''(\eta_k)|}{|2f'(\xi_k)|}}_{\downarrow \; \left|\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\right|} \underbrace{\left(\dfrac{|x^* - x_k|}{|x^* - x_k|^p}\right)^{1-p}}_{\downarrow \; c} |x^* - x_{k-1}|^{1+p(1-p)}$

$1+p(1-p)=0$

$p = 1.618$

4) 单点弦割法 线性收敛.

4. 加速收敛技术.

1) 松弛加速法.

思路. $f(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = \phi(x^*)$. $x^* \approx \tilde{x} \rightarrow$ 已知.前提.

$w = \phi'(\tilde{x}) \Rightarrow \phi(x) - w \cdot x$

$|\phi'(x^*) - w| = |\phi'(x^*) - \phi'(\tilde{x})| \ll 1$

$\psi(x) = \dfrac{\phi(x) - wx}{1-w} \Rightarrow \psi(x^*) = \dfrac{\overset{x^*}{\phi(x^*)} - wx^*}{1-w} = x^*$

2) 艾特肯加速法

前提：$\{x_k\} \to x^*$ （使 x_k, x_{k+1} 靠近 x^* ；$\phi'(x)$ 变化不大）

思路 $x_{k+1} = \phi(x_k)$

$x^* = \phi(x^*)$

$x^* - x_{k+1} = \phi'(x^*) - \phi(x_k) = \phi'(\xi_k)(x^* - x_k)$

同理 $x^* - x_k = \phi'(\xi_{k-1})(x^* - x_{k-1})$

$$\Rightarrow \frac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_k} \approx \cancel{\frac{\phi'(\xi_k)}{\phi'(\xi_{k-1})}} \frac{x^* - x_k}{x^* - x_{k-1}} \Rightarrow \bar{x}_{k+1} = x_{k+1} - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}$$

7.2 求解非线性代数方程组的迭代法

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0} \iff \vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{x})$$

$$\forall \vec{x}_0, \ \vec{x}_{k+1} = \vec{\Phi}(\vec{x}_k) \qquad \{\vec{x}_k\} \to \vec{x}^*$$

1. 简单迭代法

$$x_i^{(k+1)} = \phi_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}).$$

高斯-赛 $x_i^{(k+1)} = \phi_i(x_1^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$

雅可比矩阵

$$J_{\phi(x)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x_n} \\ & & \ddots & \end{pmatrix}$$

定义 $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{\| x^* - x^{(k+1)} \|}{\| x^* - x^{(k)} \|^p} = c.$

全局收敛定理.

(1) $\phi(x) \in D$。

(2) $\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq L\|x-y\|$ $(0<L<1)$

局部收敛性定理

$$\rho(J_\phi(x^*)) < 1.$$

2、牛顿法.

$$0 = \vec{F}(\vec{x}^*) = \underbrace{\vec{F}(\vec{x}_k) + \vec{F}'(\vec{x}_k)(\vec{x}^* - \vec{x}_k)} + \cdots \vec{x}_{k+1}$$

$$\begin{cases} \underset{J_f}{F'}(x_k)\underbrace{(\vec{x}-\vec{x}_k)}_{\Delta\vec{x}} = -\vec{F}(\vec{x}_k) \\ \vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \Delta\vec{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} J_f(x_k)\Delta\vec{x}_k = -\vec{f}(\vec{x}_k) \\ \vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \Delta\vec{x}_k \end{cases}$$

简化，J_f 为 $J_f(x^{(k)}) \to J_f(x^{(0)})$

3.布洛依登法.

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \underbrace{[F'(\vec{x}_k)]^{-1}}_{A^{-1}} F(\vec{x}_k)$$

$$\vec{F}(\vec{x}_{k-1}) \approx \vec{F}(\vec{x}_k) + \underline{\vec{F}'(\vec{x}_k)}(\vec{x}_{k-1} - \vec{x}_k)$$

$$\Rightarrow \vec{F}(\vec{x}_{k-1}) = \vec{F}(\vec{x}_k) + A_k(\vec{x}_{k-1} - \vec{x}_k)$$

记 $\vec{s}_k = \vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}$ $\quad \vec{y}_k = \vec{F}(\vec{x}_k) - \vec{F}(x_{k-1})$

$$\Rightarrow A_k\vec{s}_k = \vec{y}_k$$

构造 A_k. $A_k = A_{k-1} + \Delta A_{k-1} = A_{k-1} + u s_k^{(k)T}$

$$A_k = A_{k-1} + \frac{(\vec{y}_k - A_{k-1}s_k)s_k^T}{s_k^T s_k}. \qquad A_k^{-1} = \cdots\cdots$$

第8章 矩阵特征值与特征向量的计算

乘幂法（用于求绝对值最大的特征值）

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

$$Z_k = A^k Z_0 \qquad Z_0 = c_1\xi_1 + \cdots + c_n\xi_n$$

k充分大时 $Z_k \approx \lambda_1^k c_1 \xi_1$ $\quad \frac{Z_k}{Z_{k-1}}$（非零项）之比 $\to \lambda_1$

计算机求解时 将 Z_k 单位化. $\quad Z_k = \frac{y_k}{m_k}$ $(y_k = AZ_{k-1})$，$m_k \to y_k$ 最大项. ~~$\max(y_k)$~~

$$\lim_{k\to\infty} m_k = \lambda_1 \qquad \lim_{k\to\infty} Z_k = \frac{\xi_1}{\max \xi_1}$$

收敛率 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ ↓ 收敛↑

原点位移法 $A-pI$ 代替 A. $\quad A-pI \Rightarrow m_k = \lambda_1 - p \Rightarrow \lambda_1 = m_k + p$

反幂法（用于已知特征值的近似值时，求其精确值及对应的特征向量）

已知 $\tilde\lambda_i \approx \lambda_i$ 求 X.

对 $(A-\tilde\lambda_i I)^{-1}$ 乘幂法

~~$A-pI \Rightarrow m_k$~~

~~$A-\tilde\lambda_m$~~ $\quad (A-\tilde\lambda_m I)^{-1} \qquad Z_0 = \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$

$$y_k = (A-\tilde\lambda_m I)^{-1} Z_{k-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{(A-\tilde\lambda_m I)}_{LR} y_k}_{u} = Z_{k-1} \iff \begin{cases} Lu = Z_{k-1} \\ R y_k = u \end{cases} \qquad k=1 \quad u = \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow m_k = \frac{1}{\lambda_m - \tilde\lambda_m} \Rightarrow \lambda_m = \tilde\lambda_m + \frac{1}{m_k}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_k = A z_{k-1} \\ z_k = \dfrac{y_k}{m_k} \end{array}\right\}$$

$$z_k = \frac{y_k}{m_k} = \frac{A z_{k-1}}{m_k} = \frac{A y_{k-1}}{m_k m_{k-1}} = \cdots = \frac{A^k z_0}{m_k m_{k-1} \cdots m_1}$$

$$\max(A^k z_0) = \max(A^{k-1} A z_0) = \max(A^{k-1} y_1) = \max(A^{k-1} \frac{y_1}{m_1} m_1)$$
$$= \max(A^{k-1} z_1) m_1 = \cdots = \max(A z_{k-1}) m_{k-1} \cdots m_1$$
$$= m_k m_{k-1} \cdots m_1$$

$$\therefore z_k = \frac{A^k z_0}{\max(A^k z_0)}$$

$k \to \infty$ 时 $\quad z_k = \dfrac{\lambda_1^k \left(a_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k x_j\right)}{\lambda_1^k \max\left(a_1 x_1 + \cdots \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k x_j\right)} = \dfrac{x_1}{\max(x_1)}$

~~k充分大时~~ $\quad y_k = A z_{k-1} = \lambda_1 \dfrac{a_1 x +\cdots}{\max(a x_1 + \cdots}$

$$\therefore m_k = \max(y_k) = \lambda_1 + o\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\right)$$

当k充分大时 $\quad \lambda_1 \cong m_k$

$\begin{cases} y'(x)=f(x,y), a\le x\le b \\ y(a)=y_0 \end{cases}$

第9章 常微分方程数值解法

求 $y(x)$ 在一系列点 x_i $(a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b)$ 处 $y(x_i)$ 的近似值 y_i 的方法.

9.1 初值问题常用数值解法

9.1.1

1. 数值微分法.

用数值微分公式代替 $y'(x)$

(1) 欧拉法 (左端点).

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)$$ 显式法.

$$R[y]=y(x_{i+1})-y_{i+1}=\frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$$ 一阶.

(2) 后退欧拉法 (右端点) (稳定性比欧拉好, 步长可取的比欧拉大)

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_{i+1},y_{i+1})$$ 隐.

$$R[y]=-\frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$$ 一阶.

(3) 中点法.

$$y_{i+1}=y_{i-1}+2hf(x_i,y_i)$$ 显 2步.

$$R[y]=-\frac{h^3}{3}y'''(\xi_i)$$ 二阶

2. 数值积分法. 对方程两端积分, 右端用积分公式代替.

(1) 梯形法.

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})]$$ 隐.

$$R[y]=-\frac{h^3}{12}y'''(\xi_i)$$ 二阶.

(2) 辛普森法. 2 三步

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 4f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$ 隐

$$R[y] = -\frac{h^5}{90} y^{(5)}(\xi_i)$$ 四阶.

(3) 亚当斯显式法（k+1个节点不含 x_{i+1}）（稳定性差，h要够小）

（右端拉格朗日插值后积分）

k=0 欧拉…

$i-k \sim i$ 结点

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{A}(b_0 f_i + b_1 f_{i-1} + \cdots + b_k f_{i-k}),\quad i \geq k$$ 显 k+1步

$$R[y] = B_k h^{k+2} y^{(k+2)}(\xi_i)$$ k+1阶.

k=0 后退欧拉 —

(4) 亚当斯(Adams)隐式法.（k+1个节点包含 x_{i+1}）（数值稳定性好，步长可以取大）

$i-k+1 \sim i+1$ k

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{A^*}(b_0^* f_{i+1} + b_1^* f_i + \cdots + b_k^* f_{i-k+1}),\quad i \geq k-1$$ 隐 k步

$$R[y] = B_k^* h^{k+2} y^{(k+2)}(\xi_i)$$ k+1阶.

3. 泰勒级数法.

P阶泰勒级数法.

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{1}{2} y_i'' h^2 + \frac{1}{3!} y_i''' h^3 + \cdots + \frac{1}{p!} y_i^{(p)} h^p$$ 显. 单步

$$\begin{cases} y_i' = f(x_i, y_i) \\ y_i'' = (f_x' + f_y' f)\big|_{(x_i, y_i)} \\ \cdots \end{cases}$$ — 代入.

$$R[y] = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y^{(p+1)}(\xi_i)$$ P阶.

P=1时即为欧拉法

的多步法开始值的计算.

5. 隐式法的求解.

(1) 多步法. 除 y_0 的其他值 $y_1, y_2, \cdots$ 用其他值计算.

(2) 隐式法的求解用非线性方程求根的方法.

(i) 简单迭代法

(ii) 牛顿法

(iii) 改进欧拉法. 欧拉—预估, 隐—校正.

9.1.2 龙格—库塔法. 泰勒展开推导出.

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \cdots + \lambda_m K_m. \\ k_1 = h f(x_i, y_i) \\ k_2 = h f(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21} k_1) \\ k_3 = \cdots \end{cases}$$

(m级; 加权平均).

稳定性好, 高阶可用

单步.

$\lambda_i, \alpha_i, \beta_{jk}$ 均为常数, 由待定系数确定

$$R[y] = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$$

参数确定原则:

$y(x_{i+1}) = y(x_i + h)$ 泰勒展开, 使 $R[y]$ 的阶尽可能高.

标准(经典)4级4阶R-K法:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = h f(x_i, y_i) \\ K_2 = h f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_1) \\ K_3 = h f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_2) \\ K_4 = h f(x_i + h, y_i + K_3) \end{cases}$$

6级5阶龙格公式 (一个用途 估计误差值)

$$y(x_{i+1}) - y_{i+1} \approx \overset{6\text{-}5}{\tilde{y}_{i+1}} - \overset{4\text{-}4}{y_{i+1}}$$

9.1.3 待定系数法、预测—校正公式.

1. 用待定系数法建立线性多步法.

~~思想~~： 一般形式：

$$y_{i+1} = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{i-j} + h \sum_{j=-1}^{k} \beta_j f_{i-j} \quad \begin{cases} \beta_{-1}=0 & 显 \\ \beta_{-1}\neq 0 & 隐 \end{cases}$$

$$R[y] = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$$

思想：用待定系数法确定局部截断误差 $R[y]$ 的系数 α_j, β_j，使它的阶尽可能高.

用广义佩亚诺定理确定其误差项.

求系数方法一：泰勒展开 $y(x_{i+1})$ 二：用代数精度算.

2. 预测—校正公式.

隐式 — 预测.

显式 — 校正.

3. 预测—修正—校正—修正公式.

加上误差修正.

隐式—预测 ⇒ 隐+误差—修正 ⇒ 显—校正 ⇒ 显+误差—修正.

9.3 一阶微分方程组与高阶方程组的数值解法.

9.3.1 一阶微分方程组.

向量形式 $\begin{cases} y'(x) = f(x,y) & a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}$$

9.3.2 高阶常微分方程

$$\begin{cases} y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(m-1)}), & a \le x \le b \\ y(a) = y_0, \ y'(a) = y'_0, \cdots, y^{(m-1)}(a) = y_0^{(m-1)} \end{cases}$$

转化为如下一阶微分方程组.(令 $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $\cdots$, $y_m = y^{(m-1)}$)

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \cdots \\ y_{m-1}' = y_m \\ y_m' = f(x, y_1, y_2, \cdots, y_m) \\ y_1(a) = y_0, \ y_2(a) = y_0' \cdots \end{cases}$$

P_{242} 例 9.3.1

9.4 边值问题的数值解.

二阶常微分方程

$$y'' = f(x, y, y') \qquad a < x < b.$$

给两个条件 | 想办法近似 y', y''.