现代控制工程

第一章 绪论

第二章 系统的状态空间表达

1、状态空间模型

状态方程组　$\dot{x} = Ax + Bu$ 输入

→ 线性

输出方程组　$y = Cx + Du$ 输出

线性独立

一般，状态变量个数 $\overset{(2)}{=}$ 微分方程阶次（= 传递函数分母多项式阶次）

关注储能元件

状态方程　$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_r)$　$i = 1, 2, \cdots n$

输出方程　$y_j = g_j(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_r)$，$j = 1, 2, \cdots n$.

~~2.~~ 状态空间表达式的建立

1) 由物理机理建立

2) 由微分方程建立

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = \underline{b_n u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + b_1\dot{u} + \overset{①}{b_0 u}}_{②}$$

① $x_1 = y$　$x_2 = \dot{y}$　$\cdots$　$x_n = y^{(n-1)}$

② 原则 使微分方程组右边不出现u的导数项

繁杂

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_n \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} u \qquad y = (1\ 0 \cdots 0)\,x + \beta_0 u.$$

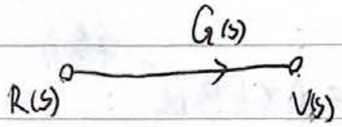
解决方法：将微分方程转换为传递函数

简单

$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$

3) 由传递函数建立

信号流图.（线变成点，$\boxed{}$ 变成线和方向）



$\left\{\begin{array}{l}\text{串联}\\ \text{并联}\\ \text{反馈}\end{array}\right.$

梅逊规则.

① 回路增益 $L1_i$.（箭头方向）

② 前向通路增益 T_k.

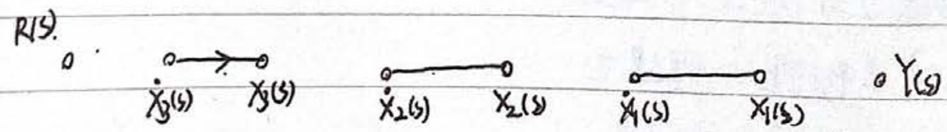
③ 互不接触回路增益 $L2_i = L1_1 \cdot L1_2$ $L3_i = L1_1 \cdot L1_2 \cdot L1_3$

④ 特征式：$\Delta = 1 - \sum_i L1_i + \sum_i L2_i - \sum_i L3_i + \cdots$

⑤ 余子式 Δk：从 Δ 中去除掉与 T_k 有接触的 L

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_k T_k \Delta_k}{\Delta}$$

状态方程转化为信号流图.



传递函数的实现方式 由传递函数写出状态方程.

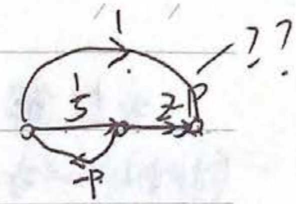
① 直接分解. $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0 u$

$\frac{Y}{X_1}$ $\frac{X_1}{U}$

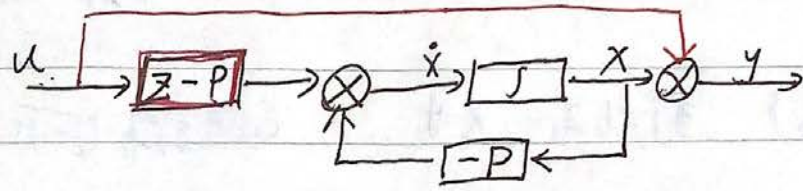
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = (b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_0)\frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{Y(s)}{Z(s)}\frac{Z(s)}{U(s)}$$

$$\begin{cases} z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{z} + a_0 z = u \\ y = b_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + b_1\dot{z} + b_0 z \end{cases}$$

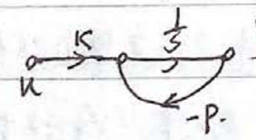
② 串联分解

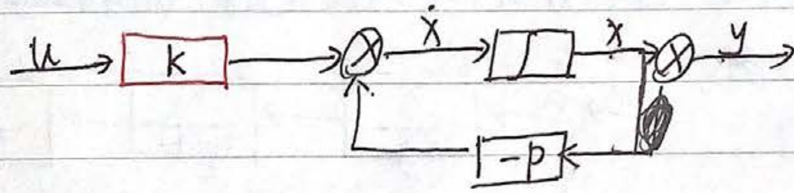


① 有零点有极点 $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+z}{s+p}$



② 无零点，仅有极点 $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s+p}$





步骤： $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n}{a_n}\frac{s+z_1}{s+p_1}\cdots\frac{s+z_m}{s+p_m}\frac{1}{s+p_{m+1}}\cdots\frac{1}{s+p_n}$

1) 因式分解.
2) 画方框图，并选择状态变量（可省）
3) 直接得到状态空间表达示.

③ 并联分解：

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s+p_1)^k (s+p_{k+1})(s+p_{k+2})\cdots(s+p_n)}$$

$$= \underbrace{\left[\frac{c_1}{(s+p_1)^k} + \frac{c_2}{(s+p_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{c_k}{(s+p_1)}\right]}_{\text{重极点}} + \left[\frac{c_{k+1}}{s+p_{k+1}} + \frac{c_{k+2}}{s+p_{k+2}} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}\right] + b_n$$

$$y = [c_1\ c_2 \cdots c_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u.$$

约当.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_k \\ \dot{x}_{k+1} \\ \dot{x}_{k+2} \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 & & & & & \\ & -p_1 & \ddots & & & 0 & \\ & & \ddots & 1 & & & \\ & & & -p_1 & & & \\ & & & & -p_{k+1} & & \\ & 0 & & & & -p_{k+2} & \\ & & & & & & \ddots \ -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

对角线型.

余数解法：部分分式法

(非重)：当 $i=k+1, k+2, \cdots, n$ 时，$C_i=\lim\limits_{s\to -p_i} G(s)(s+p_i)$

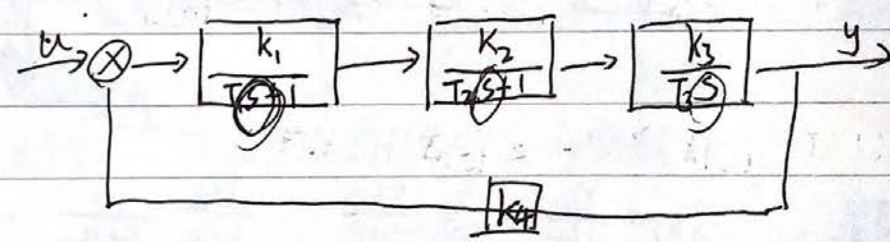
(重极点) 当 $j=1,2,\cdots,k$ 时，$C_j=\lim\limits_{s\to -p_1} \frac{1}{(j-1)!}\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}[G(s)(s+p_1)^k]$

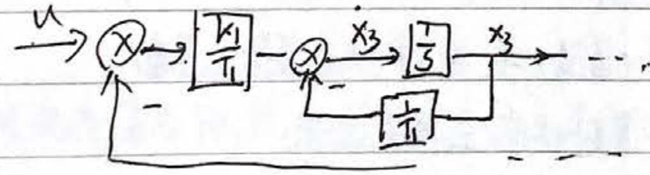
~~关键：将~~

4) 由方框图求动态方程

关键：将积分部分单独表述出来，对结构图进行等效变换

例：





4 线性变换（相似变换）

$$\begin{cases} P(\bar{x}_1+\bar{x}_2) = P\bar{x}_1 + P\bar{x}_2 = x_1+x_2 \\ P(K\bar{x}) = KP\bar{x} = Kx \end{cases}$$ P — 非奇异矩阵

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow[]{x=P\bar{x}} \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \boxed{P^{-1}AP}\cdot\bar{x} + \boxed{P^{-1}B}u \\ y = \boxed{CP}\bar{x} + Du \end{cases}$$

非唯一

1) 无重根 $A \longrightarrow$ 对角

2) 有重 $A \longrightarrow$ 约当（多解）

回顾：

矩阵逆的求法

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ 余子式注意±顺序

特征值和特征向量

性质：① 特征值和传递函数不变。

② 若 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$ — 友矩阵。

则 特征多项式为 $|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$

特征方程 $|\lambda I - A| = 0$

③ 略。

定理：若 A为友矩阵，则 P是一个范德蒙矩阵。

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

了解：约当块 $A_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$ 约当矩阵 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & & \\ & \tilde{A}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \tilde{A}_l \end{bmatrix}$

每个约当块有且仅有一个线性独立的特征向量.

5 状态方程的解 （研究对象：线性定常齐次状态方程）

1. 直接解法（时域解法）

$$\dot{X} = AX$$

$$\begin{cases} X(t)|_{t=0} = X(0) \text{ 一解：} X(t) = e^{At}X(0), \quad t \geq 0 \\ X(t)|_{t=t_0} = X(t_0) \text{ 一解：} X(t) = e^{A(t-t_0)}X(t_0), \quad t \geq t_0 \end{cases}$$

可看成右移 t_0

$$e^{At} \triangleq I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^kt^k$$

$$X(t) = (I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots)X_0 = e^{At}X_0$$

(待定系数法较麻烦)(不用管)

2. 拉氏变换求解：

$$\dot{X} = AX \quad X(t)|_{t=0} = X(0)$$

拉氏变换 $sX(s) - X(0) = AX(s) \Longrightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}X(0)$

反变换 $X(t) = \underline{L^{-1}[(sI-A)^{-1}]}X(0)$ $\quad e^{At} = L^{-1}[(sI-A)^{-1}]X(0)$

系统极点等于系统矩阵的特征值

e^{At}

性质：

1. $e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2}$

2、 $e^{A(t-t)} = e^{A0} = I$

3、 e^{At} 非奇异，$(e^{At})^{-1} = e^{-At}$

4、 若 $A \times B = B \times A$，则 $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$

5. $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At} \cdot A$

6. $e^{P^{-1}APt} = P^{-1}e^{At}P \qquad e^{At} = Pe^{P^{-1}APt}P^{-1}$

7. 若 $A = diag[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$

则 $e^{At} = diag[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots e^{\lambda_n t}]$

了解

8、若 A_i 是约当块 $\lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$

则 $e^{A_i t} = e^{\lambda_i t}\begin{bmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & t \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. A是约当矩阵：$A = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & \ddots A_n \end{bmatrix}$ A_i为约当块.

则 $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & & 0 \\ & e^{A_2 t} & \\ 0 & & \ddots e^{A_n t} \end{bmatrix}$

e^{At} 计算方法

① 直接求解法：根据定义（适用于计算机）

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{A^k}{k!}t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k$$

② 拉氏变换求解

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(SI-A)^{-1}]$$

③ 根据性质

$$e^{At} = P e^{P^{-1}APt} P^{-1} = P e^{\bar{A}t} P^{-1}$$

④ 待定系数法 C-H 定理：

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_1 + a_0 = 0$$

$$f(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0$$

$\Downarrow$ A 高于 (n-1) 次的幂都可由 A 的 0～(n-1) 次幂线性表示

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)A^k$$

λ_i 相异时

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

λ_i 有重根时略

推导：

$$e^{\bar{A}t} = P^{-1}e^{At}P$$

$$= P^{-1}(\alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \cdots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1})P$$

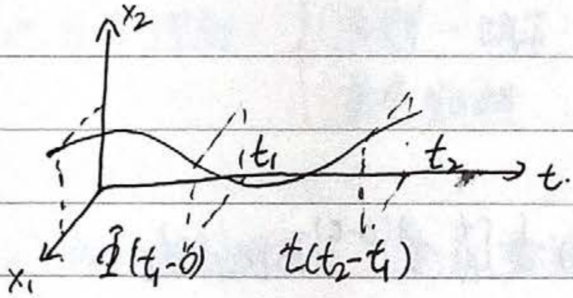
状态转移矩阵. $\dot{x}=Ax$

$$\begin{cases} e^{At}=\Phi(t) \\ e^{A(t-t_0)}=\Phi(t-t_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(t)=\Phi(t)X(0) \\ X(t)=\Phi(t-t_0)X(t_0) \end{cases}$$

—— 线性定常系统的状态转移矩阵

满足条件: ① $\Phi(t_0-t_0)=I$

② $\dot{\Phi}(t-t_0)=A\Phi(t-t_0)$



对于线性定常

$$\begin{cases} \Phi(t)=e^{At} \\ \Phi(t-t_0)=e^{A(t-t_0)} \end{cases}$$

线性时变系统的状态转移矩阵: $X(t)=\Phi(t,t_0)X(t_0)$

$\Phi(t,t_0)$ 不仅是 t 的函数, 也是 t_0 的函数.

性质	线性定常	线性时变
①不变性	$\Phi(t_0-t_0)=\Phi(0)=e^{A0}=I$	$\Phi(t_0,t_0)=I$
②	$\dot{\Phi}(t-t_0)=A\Phi(t-t_0)$	$\dot{\Phi}(t,t_0)=A(t)\Phi(t,t_0)$
③传递性	$\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)=\Phi(t_2-t_0)$	$\Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0)=\Phi(t_2,t_0)$
④可逆性	$\Phi^{-1}(t_0-t_0)=\Phi(t_0-t)$	$\Phi^{-1}(t,t_0)=\Phi(t_0,t)$
⑤分解性	$\Phi(t_1+t_2)=\Phi(t_1)\Phi(t_2)=\Phi(t_2)\Phi(t_1)$	
⑥	$[\Phi(t)]^n=\Phi(nt)$	

$\delta(t)\longrightarrow 1$

$L[\frac{1}{s+1}]=e^{-t}$. $1(t)\longrightarrow \frac{1}{s}$

$t\longrightarrow \frac{1}{s^2}$

$L[\frac{1}{s+a}]=e^{-at}$ $e^{-at}\longrightarrow \frac{1}{s+a}$

对线性定常系统

1. 已知齐次方程解，求 $\Phi(t)$ —— $\Phi(t)=X(t)X^{-1}(0)$

2. 利用矩阵指数函数 e^{At} 的求解 $\Phi(t)$

3. 已知 $\Phi(t)$，求 A —— $\dot{\Phi}(t-t_0)=A\Phi(t-t_0) \Rightarrow A=\dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}|_{t=t_0}$

4. 已知某时刻系统状态，求其他时刻状态。—— $X(t)=\Phi(t-t_0)X(t_0)$

对线性定常非齐次 $\dot{X}=AX+Bu$

1. 直接求解法：已知 $X(t_0)$

$$X(t)=e^{A(t-t_0)}X(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$X(t)=\underbrace{\Phi(t-t_0)X(t_0)}_{\text{初始状态引起}}+\int_{t_0}^{t}\underbrace{\Phi(t-\tau)Bu(\tau)}_{\text{输入引起}}d\tau$$

推导：$\dot{X}-AX=Bu$ $\quad e^{-At}[\dot{X}-AX]=\frac{d}{dt}[e^{-At}X]$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}[e^{-At}X]=e^{-At}Bu$. (积分可得上式.

求解关键：求状态转移矩阵或矩阵指数函数.

2. 拉氏变换法.

$$\dot{X}=AX+Bu \Rightarrow sX(s)-X(0)=AX(s)+BU(s)$$
$$\Rightarrow X(s)=(sI-A)^{-1}X(0)+(sI-A)^{-1}BU(s)$$
$$\Rightarrow X(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}X(0)+(sI-A)^{-1}BU(s)]$$

$e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$ $\quad L[\int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda]=F(s)\cdot G(s)$

第三章 控制系统性能分析

1、李雅普诺夫稳定性分析

1) 外部稳定 零初始条件，有界输入 有界输出稳定（适用于线性系统）
2) 内部稳定 零输入条件，状态稳定.（线性，非线性）

稳定性是系统本身特性.

稳定性方法.

1) 古典控制
- 劳斯—胡尔… —— 线性定常系统.
- 奈奎斯特

2) 现代控制理论：李亚普诺夫稳定性
- 第一法（间接）
- 第二法（直接）—线,非线,定常,时变.

二次型函数 $V(x)$ 正(负)定性判断：塞尔维斯特准则. $V(x)=X^TPX$

1) $V(x)$，P 正定 $\Longleftrightarrow$ P 的主子式为正.

2) … 负定 $\Longleftrightarrow$ 主式 $\Delta_i<0$ (i为奇)，$\Delta_i>0$ (i为偶)

一、平衡状态.

~~$\dot{x}_e=f(x_e)=AX=0$~~

$$\dot{x}_e=f(x_e)=0.$$

说明 1) 对于线性定常 $\dot{x}_e=Ax_e=0$

若 A 非奇异，则 $x_e=0$ 唯一，若 A 奇异，则 x_e 无穷多个.

2) 对非线性，有一个或多个 x_e

3) 对 $x_e\neq 0$，变换，一般将平衡状态取为状态空间原点.

4) 孤立平衡状态.

零输入+零状态-整自由响应 — 瞬态响应

强迫响应 — 稳态响应

二. 李氏下的稳定

$\|X_0-X_e\|=\sqrt{(x_0-x_e)^2+\cdots}$

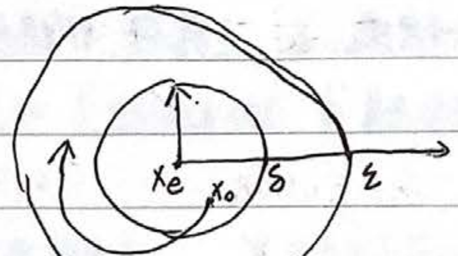
1) 稳定与一致稳定.（局部稳定）（自由响应有界） X_e为孤立平衡状态时

$\delta(\varepsilon)$ 或 $\forall\varepsilon>0$ — $\exists\ \delta(\varepsilon,t_0)$ 或 $\delta(\varepsilon)$

使 $\|X_0-X_e\|\le\delta(\varepsilon,t_0)$ 时

$\lim\limits_{t\to\infty}\|X-X_e\|\le\varepsilon$.

??

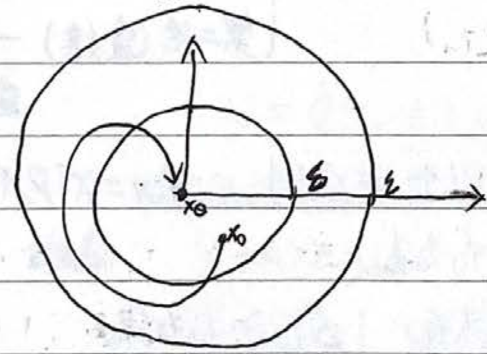


我认为坐标轴 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\end{pmatrix}$ 为 $x_1,x_2,\cdots x_n$

若 δ 与 t_0 无关，则称平衡状态是一致稳定.

2) 渐近稳定和一致渐近稳定（自由响应有界并回到平衡状态）.

$\lim\limits_{t\to\infty}\|X-X_e\|=0$.



3) 大范围稳定

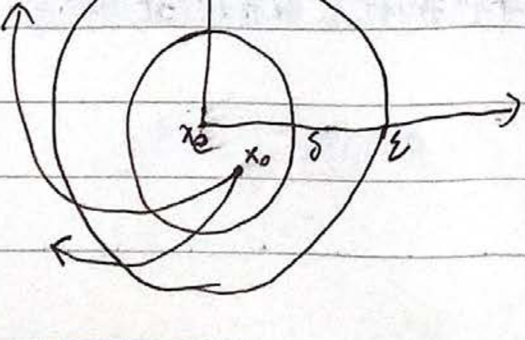
对所有点 X_0（初始偏差）都渐稳 ⇒ 整个状态空间只有一个X_e

线性定常系统渐稳 ⇒ 它一个大范围渐稳.

4) 不稳定.（系统自由响应是无界的）

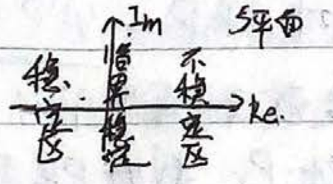
对一 $\varepsilon>0$ 不论 δ 多小

不一定趋于∞



外部判稳（间接法）

1) 线性定常连续系统 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$. 极点在s左半平面



$G(s)=\frac{(s-a)}{(s-a)\cdots}$ 有对消

输入输出稳定 $\xrightarrow{\text{不一定}}$ 渐稳

~~李~~

无对消 → 渐稳

内部判稳

1) 李氏第一法（间接法）

1. 线性定常系统——特征值判断（是否全为负实数或具有负实部） 渐稳.

2) 非线性系统——线性化再1.

2) 李氏第二法（直接法）（能量观点）

构造李氏函数 $V(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}=f(x) \quad x_e=0 \\ ① \ V(x) \text{ 正定} \\ ② \ \dot{V}(x) \text{ 负定（半负定）} \\ (③ \text{ 除 } (x=0)=0 \text{ 外}, \dot{V}(x) \text{ 不恒}=0) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

渐稳，若 $\|x\|\to\infty \Rightarrow V(x)\to\infty$ 则大范围渐稳.

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}=f(x) \quad x_e=0 \\ ① \ V(x) \text{ 在原点某一邻域内正定} \\ ② \ \dot{V}(x) \text{ 在同样邻域内正定} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$x_e=0$ 外 不稳.

李氏函数只能用于分析平衡状态邻域内的系统局部运动稳定情况

$\dot{x}=AX \quad V(x)=X^TPX$

$\dot{V}(x)=-X^TQX$

对线性定常系统判稳、

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}=AX\\ X_e=0\ \text{渐稳}\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\forall\ \text{正定实对称}\ Q\\ \exists\ \text{正定实对称}\ P \quad \underline{A^TP+PA=-Q}\end{array}\right.$$

思路：先取Q，再用 $A^TP+PA=-Q$ 求出P，判断P是否正定。

说明：1）通常取 $Q=I$。

2）如果 $\dot{V}(x)=-X^TQX$ 不恒等于0（除 $x=0$ 外）

则取 $Q=\begin{bmatrix}0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&1\end{bmatrix}$

先判断 Q, P 实对称

2、系统的可控性与可观测性

可控性：$u(t)$ 能否使 $x(t)$ 和 $y(t)$ 作任意转移。

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{状态能控性：} & \text{任意点}\longrightarrow\text{原点}\\ \text{状态能达性：} & \text{原点}\longrightarrow\text{任意点}\end{array}\right.$$

判别准则

一、秩判据 $Q_c=[B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B]$ 是否满秩。

二：标准型法。前提：线性变换不改变系统的能控性。

无重根

$$\dot{\bar{x}}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&0\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\0&&&\lambda_n\end{pmatrix}\bar{x}+\bar{B}u$$

$\bar{B}$ 不包含元素全为0的行。

（一各变量间无耦合）。

有重根：约当：每个约当块对应B的行向量是否线性无关（是否全为0）

对应的最后一行

三、频域法 $G(s)=C(SI-A)^{-1}B$

能控能观 $\Longleftrightarrow$ $G(s)$ 分子、分母间没有零、极点对消

通常令 $u=0$

可观测性：输出反映状态向量的能力（输入量在有限时间内 观测时间）（由输入引起的输出可计算）

能观测性规定为初始状态的确定

$$\dot{x}=Ax \quad y=Cx$$

判别准则

一、能观测性判别矩阵

$$Q_o=\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}=\left(C^T \vdots A^TC^T \vdots \cdots \vdots (A^T)^{n-1}C^T\right)^T$$

二、标准型法

前提：线性非奇异变换不改变系统的能观测性

无重根

$$\bar{x}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad y=\bar{C}x$$

$\bar{C}$ 不包含元素全为0的列

有重根

每个约当块首列所对应的列不全为0

三、频域法

无零极点对消

前提：线性非奇异变换，不改变系统能控性和能观测性

能控标准型，状态反馈系统设计.

1. 第一能控标准型.

系统是状态完全能控时 —— 令 $P = Q_c = [b, Ab, A^2b, \cdots, A^{n-1}b]$ — $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u \\ y = \bar{c}\bar{x} \end{cases}$

2. 第二能控标准型（常用）

$$\text{能控} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \end{cases} \xrightarrow{x = P_{c2}\bar{x}} \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u \\ y = \bar{c}\bar{x} \end{cases}$$

$$\bar{A} = P_{c2}^{-1} A P_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = P_{c2}^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

相当重要的状态空间

$$\bar{c} = cP_{c2} = [\beta_0 \ \beta_1 \ \cdots \ \beta_{n-1}]$$

$$G(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

$$P_{c2} = [A^{n-1}b, A^{n-2}b, \cdots, b] \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2 & & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_0 = c(A^{n-1}b + \alpha_{n-1}A^{n-2}b + \cdots + \alpha_1 b)$$

$$\cdots$$

$$\beta_{n-2} = c(Ab + \alpha_{n-1}b)$$

$$\beta_{n-1} = cb$$

能观测标准型：

1、第一能观测标准型.

系统状态完全能观测的 —— $P = Q_0^{-1}$

2、第二能观测标准型.

先判断

能观测 $\rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases} \xrightarrow{x = P_{02}\bar{x}} \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u \\ y = \bar{C}\bar{x} \end{cases}$

$$\bar{A} = P_{02}^{-1} A P_{02} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -\alpha_2 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0\ 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = P_{02}^{-1} b = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = C P_{02} = [0 \cdots 0\ 1]$$

$$P_{02}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \alpha_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CA^{n-1} \\ CA^{n-2} \\ \vdots \\ CA \\ C \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{b} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

我认为

刚好将输入输出反过来（画出图）

3 状态空间的稳态误差

一、Laplace 变换终值定理法

推导.
$$\begin{cases} E(s) = U(s) - Y(s) = U(s)[1 - T(s)] \\ T(s) = C(sI-A)^{-1}B + D. \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(s) = U(s)[1 - C(sI-A)^{-1}B]$$

$$\Rightarrow \boxed{e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sU(s)[1 - C(sI-A)^{-1}B]}$$

二、输入信号替换法

① 输入为单位阶跃信号 $u(t) = 1(t)$

推导：x 的稳态解 $x_{ss} = [V_1, V_2, \cdots, V_n]^T = V$

定值则有 $\dot{x}_{ss} = 0$

代入得
$$\begin{cases} 0 = AV + B \\ y_{ss} = CV \end{cases}$$

$$\boxed{e(\infty) = 1 - y_{ss} = 1 - CV = 1 + CA^{-1}B}$$

② 输入为单位斜坡函数 $u(t) = t$

$$x_{ss} = Vt + W$$

$$\dot{x}_{ss} = [V_1, V_2, \cdots, V_n]^T = V$$

$$\begin{cases} V = A(Vt + W) + Bt \\ y_{ss} = C(Vt + W) \end{cases}$$

$$y_{ss} = C[-A^{-1}Bt + A^{-1}(-A^{-1}B)] = -C[-A^{-1}Bt + (A^{-1})^2B]$$

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty}(t - y_{ss}) = \lim_{t\to\infty}[(1 + CA^{-1}B)t + C(A^{-1})^2B]$$

第四章、状态反馈和状态观测器.

1、状态反馈及极点配置.

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases} \xrightarrow[\text{u = v - Kx}]{\text{线性(状态)反馈}} \begin{cases}\dot{x} = (A-BK)x + Bv \\ y = (C-DK)x + Dv\end{cases}$$

一般 $D=0$

$\Sigma(A,B,C) \rightarrow \Sigma(A-BK, B, C)$

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & \cdots & k_{rn}\end{pmatrix}$$

$G_K(s) = C[sI - (A-BK)]^{-1}B$

特征方程 $|\lambda I - (A-BK)| = 0$.

算法. 状态要完全能控 —— 先判断

1)、极点配置算法 —— 特征多项式 ($n \leq 3$ 时)

(直接求K) ① 求得反馈后的特征多项式. $f(\lambda) = \det[\lambda I - (A-BK)]$.

② 由期望闭环极点, 写出期望特征多项式.

$f^*(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n) = \lambda^n + \alpha_{n-1}^*\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1^*\lambda + \alpha_0^*$

③ 由 $f(\lambda) = f^*(\lambda) \Longrightarrow K = [k_1, k_2, \cdots, k_n]$

2)、利用第二能控标准型法求反馈矩阵 ($n > 3$ 时)

① $\Sigma(A,B,C) \longrightarrow \Sigma(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ 求出 $\bar{A}$ 和 P_{c2}

$$\bar{A} - \bar{B}\bar{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -(\alpha_0+\bar{k}_1) & \cdots & \cdots & & -(\alpha_{n-1}+\bar{k}_n)\end{bmatrix}$$

② 求能控标准型下闭环系统的特征多项式.

$f(\lambda) = |\lambda I - (\bar{A} - \bar{B}\bar{K})| = \lambda^n + (\alpha_{n-1} + \bar{k}_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (\alpha_1 + \bar{k}_2)\lambda + (\alpha_0 + \bar{k}_1)$

③ 求出期望的闭环极点 (直接给定或性能指标 超调量 M_p% 和调整时间等)

④ 写出期望的特征多项式 $f^*(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\cdots = \lambda^n + \alpha_{n-1}^*\lambda^{n-1} \cdots$

α_i^* 由 $G(s)$ 得出

⑤ 由 $f(\lambda) = f^*(\lambda)$ 得 $\bar{K} = [\alpha_0^* - \alpha_0 \mid \alpha_1^* - \alpha_1 \mid \cdots \mid \alpha_{n-1}^* - \alpha_{n-1}]$

⑥ 求出 $K = \bar{K}P_{c2}^{-1}$

闭环系统期望极点的选取

原则：1) n维控制系统，一n个期望极点

2) 物理上可实现，为实数/共轭复数对

3) 考虑对系统品质的影响（离虚轴的位置）及与零点分布状况的关系

4) 离虚轴距离较近的主导极点收敛慢，对系统性能影响最大

利用性能指标选取

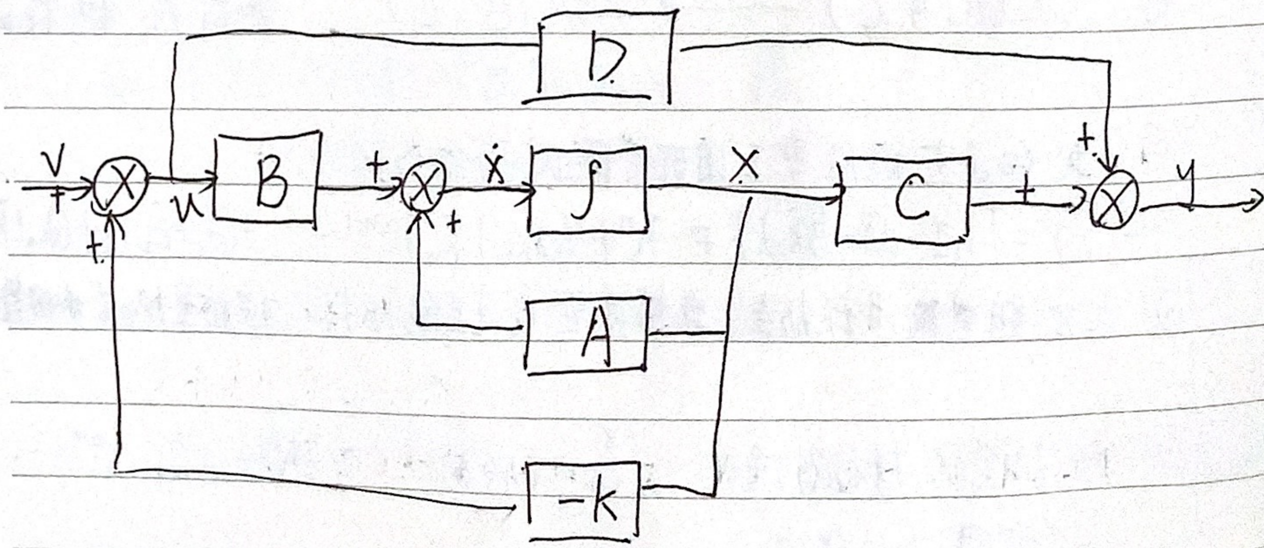
超调量 $M_p\% = e^{\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \times 100\%$　　$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

过渡时间 $T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$

若要高阶变低阶 注意极点选取（附加极点 与零点对消，距离远的点）

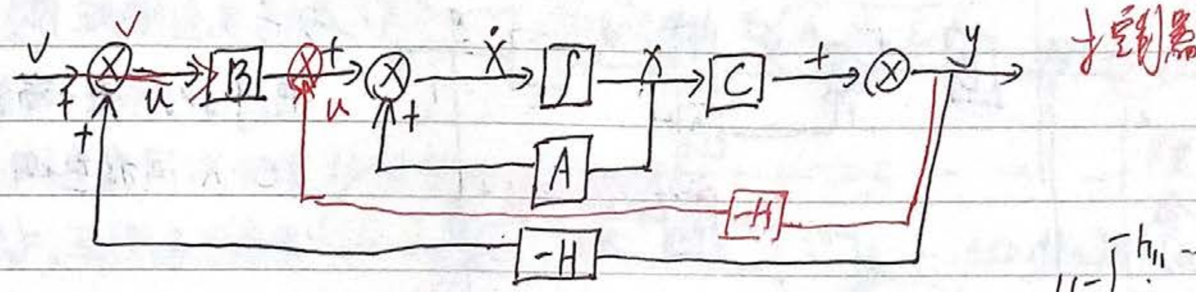
定理：

若 $\Sigma_0=(A,B,C)$ 线性定常系统能控 $\Longrightarrow$ 闭环系统 $\Sigma=(A-BK,B,C)$能控



2 输出反馈及极点配置（两种）

一、输出到参考输入的反馈



$$H=\begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{r1} & \cdots & h_{rm} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_0(A,B,C) \xrightarrow{u=v-Hy} \Sigma(A-BHC,\ B,\ C)$$

$$G_H(s)=C[sI-(A-BHC)]^{-1}B$$

结论：① $HC=K$ 时，输出到参考输入的反馈与状态反馈等价。

故输出到参考输入的反馈不改变系统的能控性。

② 输出信息不一定包含系统的全部状态变量。

所以输出反馈是部分状态反馈。

③ 不影响系统的可观测性。

二、输出到状态微分的反馈

我认为可观测后才能用y来调控状态

$$\Sigma_0(A,B,C) \xrightarrow{u=Bv-Hy} \Sigma(A-HC,\ B,\ C)$$

定理：输出到状态微分的反馈，其极点任意配置条件为原系统状态可观测

结论：输出到状态微分的反馈不改变系统能观性，不改变系统的零点。

任意配置后，零极点对消可能导致能控性发生变化。 我认为可用能观性

但是——我认为是看是依照我的一种手段与叫法无差

极点配置方法：同状态反馈系统的极点配置

$$f(\lambda)=|\lambda I-(A-HC)|=f^*(\lambda)=0 \Rightarrow H$$

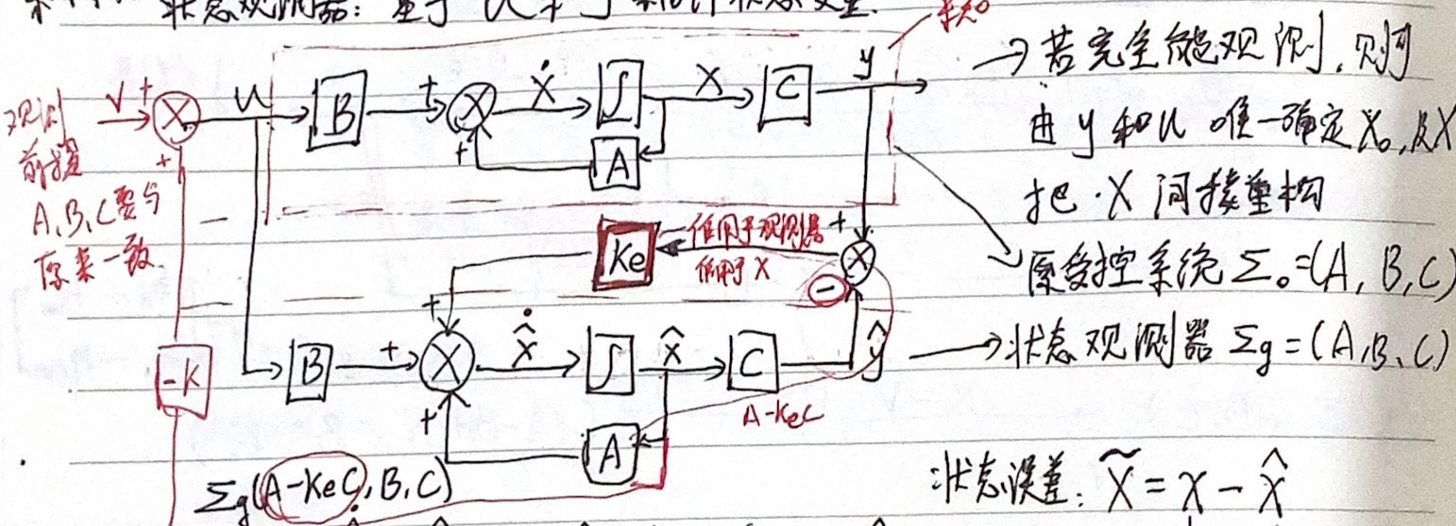
原系统 x 一般未知　　$x-\hat{x}=e^{At}(x_0-\hat{x}_0)$

3 状态观测器

一、原理和构成

状态重构：不是所有物理量能直接测得，用输入 u 和输出 y 来估计状态

状态观测器：基于 u 和 y 来估计状态变量



状态误差：$\tilde{x}=x-\hat{x}$（x：原，$\hat{x}$：状观）

渐近状态观测器　$\dot{\hat{x}}=A\hat{x}+K_e(y-\hat{y})+Bu=(A-K_eC)\hat{x}+K_ey+Bu$

$$y-\hat{y}=Cx-C\hat{x}=C(x-\hat{x})\quad\Rightarrow\quad\lim_{t\to\infty}(x-\hat{x})=0$$

若 $\lim\limits_{t\to\infty}(y-\hat{y})=0$

将输出误差 $(y-\hat{y})$ 进行反馈，使 $(y-\hat{y})$ 尽快逼近到 0　从而使 $(x-\hat{x})$ 尽快趋近于 0

二、存在条件：

$\lim\limits_{t\to\infty}(x-\hat{x})=0$ —— 存在条件．

线性定常系统不能观测的部分是渐近稳定的

三、状态观测器极点配置条件和算法．

定理：线性定常系统的状态观测器极点任意配置，

即具有任意逼近速度的充要条件 原系统为状态完全能观测

1. 直接法．$(n\le3)$

① 判断能否观测

② 求观测器的特征多项式．$f(\lambda)=|\lambda I-(A-K_eC)|$

③ 写出状态观测器的期望特征多项式　$f^*(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\cdots=\lambda^n+a_{n-1}^*\lambda^{n-1}\cdots+a_0^*$

④ 由 $f(\lambda)=f^*(\lambda)$ 确定状态观测器的反馈矩阵：$K_e=\begin{bmatrix}k_{e1}\\k_{e2}\\\vdots\\k_{en}\end{bmatrix}$

2. 第二能观测标准型法（$n \geq 3$）

① 判断能否观测

② 原系统 $\Sigma(A,B,C) \longrightarrow$ 能观标准型 $\Sigma(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$

确定 P_{02}

③ 求第二能观测标准型，特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda I-(\bar{A}-\bar{K}_e\bar{C})|=\lambda^n+(\alpha_{n-1}+\bar{k}_{en})\lambda^{n-1}+\cdots+(\alpha_1+\bar{k}_{e2})\lambda+(\alpha_0+\bar{k}_{e1})$$

④ 写出期望特征多项式.（期望的响应速度要快 2～5倍）—因为要比反馈的快

$$f^*(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots=\lambda^n+\alpha^*_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_1^*\lambda+\alpha_0^*$$

⑤ 由 $f(\lambda)=f^*(\lambda)$

$$\bar{K}_e=\begin{bmatrix}\bar{k}_{e1}\\ \vdots\\ \bar{k}_{en}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_0^*-\alpha_0\\ \vdots\\ \alpha^*_{n-1}-\alpha_{n-1}\end{bmatrix}$$

⑥ $K_e=P_{02}\bar{K}_e$

4 带有状态观测器的状态反馈

一、构成

观测器 + 状态反馈　　用观测器的估计状态实现反馈

$\hat{x}$ 为 x 重构状态，阶数小于等于 x 阶数，系统阶数为 $\hat{x}$ 与 x 阶数和

二、带有观测器的状态反馈系统的输入输出特性

组合系统的传递函数为：$G(s)=C[sI-(A-BK)]^{-1}B$

组合系统的特征多项式为：$f(\lambda)=\det[\lambda I-(A-BK)]\det[\lambda I-(A-K_eC)]$

结论：① 传递函数与状态反馈部分完全相同. 用观测器的估计状态进行反馈，不影响系统的输入输出

② 特征值由状态反馈和观测器两部分组成，相互独立，不受影响，所以系统能控和能观测时，则状态反馈矩阵 K 和状态观测器反馈矩阵 K_e 可以单独设计（分离特性）

第五章 最优控制

5.1 函数 $\underset{\text{自变量}}{X} \longrightarrow y(x)$ $a<x<b$ —定义域 δX 微分

泛函 $\underset{\text{宗量}}{y} \longrightarrow J(y)$ $y_1<\underset{\text{容许函数}}{y}<y_2$ —容许条件 δy 变分

泛函变分：

$$\delta J = L[y(\cdot), \delta y(\cdot)]$$

泛函变分定理：

$$\delta J(y_0, \delta y) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J[y_0 + \varepsilon \delta y(\cdot)]\Big|_{\varepsilon=0}$$

泛函极值定理

$$\delta J = 0$$

价值泛函 $J(y) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, y(t), y'(t))\, dt.$

Euler方程（端点固定时，$\delta J=0$ 满足的条件）

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

可动边界变分与横截条件（终末端可动边界变分 ）

$$\left[F + (\dot{\varphi} - y')\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\Big|_{t=t_1} = 0$$

含有多个函数的泛函求极值

最优控制问题描述.

1. 状态方程. $x(t)$ 状态向量　$x(0)$ 初始条件　$u(t)$ 控制向量

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t) \\ x(t)\big|_{t=t_0} = x_0 \end{cases}$$

2. 容许控制 u

满足约束 $u(t)$ 的集合

3. 目标集 x

$x_0 \longrightarrow x_f$. (所能取值的范围为 Ω)

4. 性能指标.

$$J[u(t)] = \varphi(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(x, u, t)\, dt.$$

φ: 强调终未状态 $x_0 \to x_f$

F: 控制过程.

使上述 $x_0 \to x_f$, $J(u)$ 到极值的 $u(t)$ 为最优控制.

有约束 $\xrightarrow{\text{加入Lagrange算子}\lambda(t)}$ 无约束

5.2 经典变分. $u(t)$ 连续可微, 取值不受限.

终止时刻

- t_f 固定
  - x 受到约束.
  - x 不受约束
- t_f 自由
  - ......
  - ...

5.3 极小值原理　$u(t)$受限.

$\hat{u}(t)$ 使 Hamilton 函数最小.

5.4 动态规划　求解多级决策过程最优化.

核心: 贝尔曼最优性原理.

多级决策控制 ⟶ 单级优化问题

5.5 线性二次最优控制. (性能指标为 x 和 u 的二次型函数).

$t_0 \to t_f$　u_t 不受限.

确定 u 使 J 最小.

$$J = \underbrace{\frac{1}{2} e^T(t_f) F e(t_f)}_{\text{末端值加权项}} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \underbrace{[e^T(t) Q(t) e(t) + u^T(t) R(t) u(t)]}_{\text{积分项}} dt.$$

末端值加权项.

~~动态误差~~.

稳态误差.　　动态误差.　　能量消耗

- 状态调节器
- 输出调节器
- 输出跟踪器.