应用数理统计

Review.

概率论. 随机变量的含义 { 数字特征: 期望, 方差; 离散型; 连续型.

$Y=g(X)$ 的概率分布.

多维随机变量.

定义: $X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)$ 定义在同一 Ω.

$$X(\omega)=(X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)).$$

边际分布 联合分布函数. $\forall x_1, \cdots, x_n$, $F(x_1, \cdots, x_n)=P(X_1\le x_1, \cdots, X_n\le x_n)$

边际分布列 联合分布列 (X, Y) $P_{ij}=P(X=x_i, Y=y_i)$ $i, j\neq 1, 2$.

边际密度 联合密度函数.函数.

$\exists$ 二元非负函数 $p(x,y)$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)\,dv\,du.$$

独立性.

A. B. $P(AB)=P(A)P(B)$

$X_1, \cdots X_n$ $F(x_1, \cdots, x_n)=\prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$ 称 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立.

离散 $P(X_1=x_1, \cdots, X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n} P(X_i=x_i)$

连续 $f(x_1, \cdots, x_n)=\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$

$(X_1, \cdots, X_n)$ 多维 r.v.

数字特征.

1. 期望 (X,Y) $Z=g(X,Y)$ $EZ=\begin{cases}\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)P(X=x_i, Y=y_j) & \text{离} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\,p(x,y)\,dx\,dy. & \text{连}\end{cases}$

① $E(X+Y)=EX+EY.$

$E(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} EX_i.$

2°若X与Y独立.

则 $EXY = EX \cdot EY$.

若 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立, 则 $E\prod_{i=1}^{n} X_i = \prod_{i=1}^{n} EX_i$.

② $Var(X) = E(X-EX)^2 = \underline{EX^2 - (EX)^2}$.

$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

$\cancel{Var}$ $D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2cov(X,Y)$

若X与X相互独立. $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$

③ 协方差.

$cov(X,Y) = E(X-EX)(Y-EY) = \underline{EXY - EXEY}$

1. $cov(X,Y) = cov(Y,X)$

2. $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2cov(X,Y)$

3. $Cov(X,a) = 0$

$cov(aX, bY) = ab\, cov(X,Y)$

$cov^2(X,Y)$ $\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$

问题 $g(X_1, \cdots, X_n)$ 分布?

X,Y为例. X与Y独立. X+Y的概率密度. X·Y 等

常用离散分布.

1° 0-1分布 $X \sim b(1,p)$

$p_k \overset{P\{X=k\}}{=} p^k (1-p)^{1-k}$, $k=0,1$.

$EX = p$, $Var X = p(1-p)$

2° 二项分布. $X \sim b(n,p)$

$p_k \overset{P\{X=k\}}{=} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k = 0, 1, \cdots, n$.

$EX = np$, $Var(X) = np(1-p)$

3° 泊松分布 $X \sim P(\lambda)$ $\quad P_k \overset{[X=k]}{=} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,\cdots$

$EX=\lambda$, $VarX=\lambda$.

连续分布

1° 正态分布. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$EX=\mu$, $VarX=\sigma^2$.

2° 均匀分布.

$X \sim U(a,b)$ $\quad f(x)=\frac{1}{b-a}$ $\quad a \le x \le b$.

$EX=\frac{a+b}{2}$, $VarX=\frac{(b-a)^2}{12}$.

3° 指数分布.

$X \sim Exp(\lambda)$ $\quad f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$. ※

$EX=\frac{1}{\lambda}$, $VarX=\frac{1}{\lambda^2}$

多维: $\boxed{\text{多项分布}}$ ① $F(y)=P(Y \le y)$

② $F'(y)=f(y)$.

第1章. 数理统计的基本概念

1.1 总体，样本，统计量

① 样本具有随机性　　　　i.i.d. 独立同分布

② 样本具有独立性.

总体 — 有限总体 N
　　　 — 无限总体.

统计量　$t = g(X_1, \cdots, X_n)$　　　$t=(y_1,\ g_2 \cdots)$

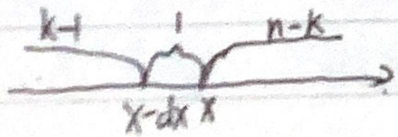
样本矩：　$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$　　修正样本方差 $S^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

样本k阶原点矩　$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

样本k阶中心矩　$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$

(次)
顺序统计量．　$(X_{(1)}, \cdots, X_{(n)})^T$　　　总体 $X \sim f(x)$

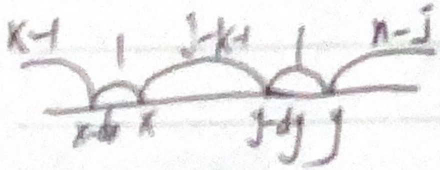
(1)　$X_{(k)}$ 的概率密度 $f_{(k)}(x)$　$(1 \le k \le n)$　　概率微元法.



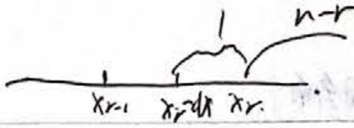
$$f_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}[F(x)]^{k-1}[1-F(x)]^{n-k} f(x)$$

dx充分小.

(2)　$X_{(k)}$ 与 $X_{(j)}$ 的联合概率密度 $f_{(k)(j)}(x, y)$　　$(1 \le k < j \le n)$



$$f_{(x)(y)}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(j-k-1)!(n-j)!}[F(x)]^{k-1}[F(y)-F(x)]^{j-k-1} \cdot [1-F(y)]^{n-j} f(x) f(y)$$



前r个

$$f_{(1)\cdots(r)}(x_1,\cdots,x_r)=\begin{cases}\frac{n!}{(n-r)!}[1-F(x_r)]^{n-r}f(x_1)\cdots f(x_r) & x_1<\cdots<x_r\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$$

样本中位数 $$Me=\begin{cases}X_{((n+1)/2)} & n\text{为奇}\\ \frac{1}{2}\left(X_{(\frac{n}{2})}+X_{(\frac{n}{2}+1)}\right) & n\text{为偶}\end{cases}$$

样本极差. $r=x_{(n)}-x_{(1)}$

经验分布函数. 总体 $X\sim F(x)$

$$F_n^*(x)=\begin{cases}\frac{0}{n}=0 & x<x_{(1)}\\ \frac{k}{n} & x_{(k)}\le x<x_{(k+1)} \quad k=1,2,\cdots,n-1\\ \frac{n}{n}=1 & x_{(n)}\le x\end{cases}$$

① 固定 $(x_1,\cdots,x_n)^T$. $F_n^*(x)$作为x的函数 就是分布函数.

② 固定 x, $F_n^*(x)$是随机变量

$$=\frac{m(x)}{n}$$

$$m(x)=\sum_{i=1}^{n}u(x-x_i) \qquad u(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$$E[F_n^*(x)]=F(x)$$

$$D[F_n^*(x)]=\frac{F(x)[1-F(x)]}{n}.$$

1.2 抽样分布（统计量的分布）

1. Γ分布

$X \sim \Gamma(\underbrace{\alpha}_{\text{形状}}, \underbrace{\lambda}_{\text{尺度}})$　$\alpha > 0,\ \lambda > 0$

$$f(x;\alpha,\lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

Γ函数　$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx$

$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$　　$\Gamma(n+1) = n!$

$\Gamma(1) = 1$　　$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(p,q)$　　$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}$

$\left(\Gamma(p)\Gamma(q) \text{ 求 } \Gamma(p+q)\, B(p,q) \right)$

证. $\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)}\,dx\,dy$

$0 < u = x+y < \infty$　$\begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases}$　有　$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u$

$0 < v = \frac{x}{x+y} < 1$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^1 (uv)^{p-1}(u(1-v))^{q-1} e^{-u}\,dv\,du$$

$$= \underbrace{\int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u}\,du}_{\Gamma(p+q)} \ \underbrace{\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,dv}_{B(p,q)}$$

性质：① $EX = \frac{\alpha}{\lambda}$　　$DX = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

② 若 $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \lambda)$　i.i.d.

$X_1 + \cdots + X_n \sim \Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \lambda)$.

$\alpha = 1$ 时　$X \sim Exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$

$X_i \sim Exp(\lambda)$　$\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$

[illegible]

② 倒Γ / 逆Γ　　　$P(Y \le y) = P(\frac{1}{X} \le X)$

$X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$　$Y = g(X) = \frac{1}{X}$　　$X = h(y) = \frac{1}{y}$　$h'(y) = \frac{1}{y^2}$

① $g(x)$ 单调　　$f_Y(y) = P_X(h(y))\, h'(y)$　　$a < y < b$

② 定义

2. β分布. $X \sim \beta(a,b)$ $a>0,\ b>0$

$$f(x;a,b) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)},\quad 0<x<1$$

性质 ① $EX = \frac{a}{a+b}$ $DX = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

② $X \sim \Gamma(a,1)$ $Y \sim \Gamma(b,1)$ X, Y 独立.

$$Z = \frac{X}{X+Y} \sim \beta(a,b)$$

求法:

X, Y (X,Y) 联合密度.

$$\begin{cases} Z = \frac{X}{X+Y} \\ u = X \end{cases}$$

增补变量 (Z, u) 的联合密度.

$p(z,u)$ 关于 u 积分, 可得 $p_Z(z)$

$X \sim \beta(1,1) = U(0,1)$

3. χ^2分布. 

$X_i \sim N(0,1)$ $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$

性质 ① $EX = n$ $DX = 2n$.

$X \sim \chi^2(n) = \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ — 证. $Y \sim \chi^2(1)$ $Y = X^2$ $X \sim N(0,1)$

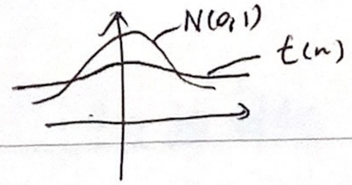
$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\} = \cdots$

$f'_Y(y) = \cdots$

② $X_i \sim \chi^2(n_i)$.

$X_1 + X_2 + \cdots + X_k \sim \chi^2(n_1 + \cdots + n_k)$

③ $n \to \infty$ 时 $\chi^2 \sim N(n, 2n)$



4. t分布

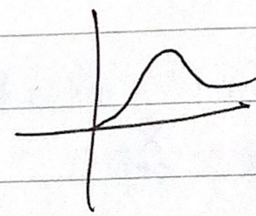
$$X \sim N(0,1), \quad Y \sim \chi^2(n)$$

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$

5. F分布.

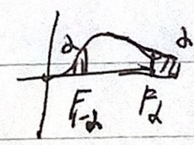
$$X \sim \chi^2(n_1), \quad Y \sim \chi^2(n_2)$$ X, Y独立

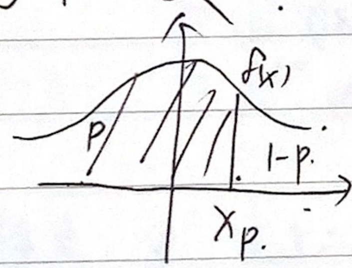
$$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$$

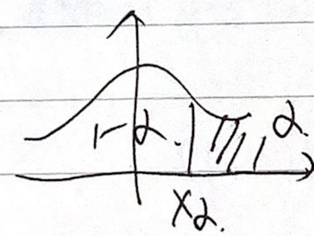


$$\frac{1}{F} \sim (n_2, n_1)$$

分位数.







$$F(x_p) = p.$$

$$F(y_\alpha) = 1-\alpha.$$

$$F_\alpha(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2, n_1)}$$

$$\chi^2_\alpha(1) = u^2_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$F_\alpha(1, n) = t^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$$

$$u_{1-\alpha} = -u_\alpha \qquad t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$$

正态总体的抽样分布.

定理1.

(1) $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

(2) $\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ — 消去了一个 z^2.

不可表示有偏的σ

$\frac{nS^2}{\sigma^2}$

(3) $\overline{X}$ 与 S^{*2} 相互独立.

2. $$T=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n-1)$$

3. $$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

$$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_{1n_1}^{*2}+(n_2-1)S_{2n_2}^{*2}}{n_1+n_2-2}}.$$

4. $$F=\frac{\sigma_2^2 S_{1n_1}^{*2}}{\sigma_1^2 S_{2n_2}^{*2}}\sim F(n_1-1,\ n_2-1).$$

第2章 参数估计

2-1 点估计和估计量的求法

估计量 $\hat{\theta}_i(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 估计值 $\hat{\theta}_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

矩估计法：

总体k阶原点矩 $\alpha_k = E(X^k)$

样本矩 $\overset{(原点)}{A_k}$ / B_k 估计 总体矩. 样本k阶原点矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

$\hat{\mu} = \overline{X}$ $\hat{\sigma}^2 = S^2$

极大似然估计法 (优：用了总体的分布).

样本出现观测值的概率. $L(\theta)$

顺序统计量法.

$\hat{\mu} = M_e$ 一样本中位数

$\hat{\sigma} = R/d_n$ 此估计量的均方误差 $\frac{v_n^2}{d_n^2}\sigma^2$ 标准差 $\frac{v_n}{d_n}\sigma$

样本极差.

$n>10$时，分成若干组

2.2 估计量的评判标准.

2.2.1. 无偏性 — 平均误差

$E(\hat{\theta}-\theta)=0 \Rightarrow E\hat{\theta}=\theta$.

无偏估计量 $E\hat{\theta}=\theta$.

有偏估计量 $E\hat{\theta}\neq\theta$ $E(\hat{\theta})-\theta \to$ 偏差.

渐近无偏估计量 $\lim\limits_{n\to\infty} E(\hat{\theta})=\theta$.

$\exists$, $g(\theta)$, $T=T(X_1\cdots X_n)$ 使 $ET=g(\theta)$.

则 $g(\theta)$ 为可估函数, T 为 $g(\theta)$ 的无偏估计量.

结论 (1) $\exists EX=\mu$. 则 $E\bar{X}=\mu$ $\bar{X}$ 为 μ 的无偏估计量

(2) $\exists EX^k=\alpha_k$ 则 $EA_k=\alpha_k$

(3) $\exists DX=\sigma^2$ 则 S^2 为 σ^2 的渐——

$ES^{*2}=\sigma^2$ 无偏

注意: 无偏估计量. 可以不存在 有多个 有明显弊端

不具有不变性 $E\hat{\theta}=\theta \nrightarrow Eg(\hat{\theta})=g(\theta)$.

2.2.2 有效性 — 误差偏离程度

1. 均方误差 $MSE(\hat{\theta},\theta)\triangleq E(\hat{\theta}-\theta)^2$

一致最小均方误差估计量. $\hat{\theta}^*$

$$MSE(\hat{\theta}^*,\theta)\leq MSE(\hat{\theta},\theta),\ \forall\theta\in\Theta$$

$$MSE(\hat{\theta},\theta)=D(\hat{\theta})+(E\hat{\theta}-\theta)^2$$

推导: $E(\hat{\theta}-\theta)^2=E(\hat{\theta}^2+\theta^2-2\hat{\theta}\cdot\theta)=E\hat{\theta}^2-2\theta E\hat{\theta}+\theta^2=E\hat{\theta}^2-(E\hat{\theta})^2+(E\hat{\theta})^2$

$-2\theta E\hat{\theta}+\theta^2=D(\hat{\theta})+(E\hat{\theta}-\theta)^2$

$\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量时.

$MSE(\hat{\theta},\theta)=D(\hat{\theta})$ 方差最小准则.

2. 一致最小方差无偏估计量 $\hat{\theta}^*$ UMVUE

$$D_\theta(\hat{\theta}^*) \leq D_\theta(\hat{\theta}), \ \forall \theta \in \Theta$$

$$U = \{\hat{\theta} : E_\theta(\hat{\theta}) = \theta, \ D_\theta(\hat{\theta}) < \infty, \ \forall \theta \in \Theta\}$$

$$U_0 = \{\hat{\theta}_0 : E_\theta(\hat{\theta}_0) = 0, \ D_\theta(\hat{\theta}_0) < \infty, \ \forall \theta \in \Theta\}$$

定理 2.2.1

$\hat{\theta}^* \in U$, $\hat{\theta}_0 \in U_0$, 则 $\hat{\theta}^*$ 为 UMVUE.

$\Longleftrightarrow \ E_\theta(\hat{\theta}^* \hat{\theta}_0) = 0, \ \forall \theta \in \Theta$ （即 $\hat{\theta}^*$ 与 $\hat{\theta}_0$ 不相关时）.

定理 2.2.1 θ 至多存在一个 UMVUE.

证明 $\hat{\theta}^*$ 为 UMVUE 思路:

① $\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}_0(x_1, \cdots, x_n) \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \, dx_1 \cdots dx_n$

② 求导 凑出 $\hat{\theta}^*$ 即可得出证明

3. Rao-Cramer 不等式.

定理2.2.3 条件: $T = (X_1, \cdots, X_n)$ 是 $g(\theta)$（可估函数）的无偏估计量

(1) $\{x : f(x;\theta) > 0\}$ 与 θ 无关.

(2) $\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\theta) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f(x;\theta)}{\partial \theta} \, dx$

(3) $I(\theta) = \boxed{E\left(\frac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial \theta}\right)^2} > 0$ Fisher 信息量.

则

$$D(T) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{n I(\theta)} \text{ —— } g(\theta) \text{ 的 R-C 下界.}$$

$g(\theta) = \theta$ 时.

$$D(T) \geq \frac{1}{n I(\theta)} \text{ —— } \theta \text{ 的 R-C 下界}$$

$$\boxed{I(\theta) = E\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2 = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial \theta^2}\right)}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\theta) \, dx = 1$

得 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \theta} f(x;\theta) \, d\theta = 0$

对数形式 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta} f(x;\theta) \, dx = 0$

再导 $\int \frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial \theta^2} f(x;\theta) + \int \left[\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}\right]^2 f(x;\theta) \, dx = 0$

$\Downarrow$

$E\left[\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}\right]^2 = -E\left[\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2}\right]$

σ^2 的 R-C 下界 $\frac{2\sigma^4}{n}$

σ^2 的 UMVUE S^{*2} $D(S^{*2}) = \frac{2\sigma^4}{n-1} > \frac{2\sigma^4}{n}$

表明：一致最小方差无偏估计 UMVUE 的方差 未必能达到 R-C 下界.

4. 有效估计量：若 $g(\theta)$ 的无偏估计 $T=T(X_1,\cdots,X_n)$ 的方差达到 R-C 下界

即 $D_\theta(T) = \frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)}$ $\forall\theta\in\Theta$ 称 T 为 $g(\theta)$ 的有效估计量.

有效率 $e(T) = \frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)} \Big/ D(T)$

渐近有效估计 $\lim\limits_{n\to\infty} e_n(T) = 1$

定理 2.2.4（2.2.3 条件下）

(1) T 是 $g(\theta)$ 的有效估计量 $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = \underset{\neq 0}{C(\theta)}[T-g(\theta)]$ 似然函数 T 是 $g(\theta)$ 的无偏估计 实际做，凑出 $T-g(\theta)$ 即得 $C(\theta)$

(2) $D_\theta(T) = \frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)} = \frac{g'(\theta)}{C(\theta)}$ $I(\theta) = \frac{C(\theta)g'(\theta)}{n}$ $I = \frac{Cg'}{n}$

当 $g(\theta)=\theta$ 时 有 $D_\theta(T) = \frac{1}{C(\theta)}$，$I(\theta) = \frac{C(n)}{n}$.

(3) 有效估计量唯一.

(4) $g(\theta)$ 的有效估计量 是 $g(\theta)$ 的唯一极大似然估计量

常用结论.

1、样本 k 阶矩 A_k 是总体 k 阶矩 α_k 的一致估计.
矩估计法得到的估计量为一致估计量.

2、$E\hat\theta=\theta$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} D(\hat\theta)=0$，则 $\hat\theta$ 是 θ 的一致估计量

2.2.3 相合性 n很大时，可估计到任意精度.

相合估计量（一致估计量） $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|T_n-g(\theta)|\geq\varepsilon\}=0$ $(\overset{(P)}{\lim\limits_{n\to\infty}} T_n = g(\theta).)$ 用契比

$\Uparrow$

均方相合估计量. $\lim\limits_{n\to\infty} E[T_n-g(\theta)]^2 = 0$ $(\overset{(M.S.)}{\lim\limits_{n\to\infty}} T_n = g(\theta))$

结论：(1) $\hat\theta$ 为 θ 的相合估计 不(需)解性? $g(t)$ 为连续函数，$g(\hat\theta)$ 是 $g(\theta)$ 的相合估计.

(2) 常数列 C_n $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 1$. $C_n\hat\theta$ 也是 θ 的相合估计.

契比 $P(|X-EX|\geq\varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$

2.4 区间估计

2.4.1 区间估计概念

$$P\{\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)\}\geq 1-\alpha$$

统计量　　　　　　　　　　　　置信度

每取一次样本，$\underline{\theta}$, $\overline{\theta}$ 会变.

米看精确度　$E(\underline{\theta}-\overline{\theta})$ — 置信区间平均长度.

枢轴量法：从 θ 的点估计量入手，构造枢轴量 G — 仅包含样本和 待估参数 θ

找出置信区间.

2.4.2 一个正态总体的情形.

$$P\{c<\underbrace{U}_{\text{无穷多}}<d\}=1-\alpha$$

1. μ — $\overline{X}$

(1) σ^2 已知　$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$

通过取 c, d.

$P\{U\leq c\}=\frac{\alpha}{2}$

$P\{U\geq d\}=\frac{\alpha}{2}$

$$P\{-u_{\frac{\alpha}{2}}<U<u_{\frac{\alpha}{2}}\}=1-\alpha$$

(2) σ^2 未知　$T=\cancel{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}}\ \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S^*}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$

$$P\{|T|<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=1-\alpha$$

2. σ^2 — S^{*2}

(1) μ 已知. (自相)

$$\chi^2=\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)\qquad \chi^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$$

(2) μ 未知.　　$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}<\chi^2<\chi^2_{\alpha/2}\}=1-\alpha$.

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

2.4.3 两正态总体的情形

1. $\mu_1-\mu_2$ — $\bar{X}-\bar{Y}$

(1) σ_1^2 和 σ_2^2 已知

$$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

(2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

$$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_{1n_1}^{*2}+(n_2-1)S_{2n_2}^{*2}}{n_1+n_2-2}}$$

(3) σ_1^2、σ_2^2 未知 $n_1=n_2=n$

$$Z_i=X_i-Y_i\sim N(\mu_1-\mu_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

$\cancel{\bar{Z}\sim t}$

$$\bar{Z}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\ \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}\right)$$

$$T=\frac{\bar{Z}-(\mu_1-\mu_2)}{\frac{S_Z^*}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)\qquad S_Z^*=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})^2}$$

2. $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ — $S_{1n_1}^{*2}$，$S_{2n_2}^{*2}$

建议 (1) $\mu_1\ \mu_2$ 已知时（自证）

$$F=\frac{\sigma_2^2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\sim F(n_1,n_2)$$

(2) μ_1,μ_2 未知时

$$F=\frac{\sigma_2^2\,S_{1n_1}^{*2}}{\sigma_1^2\,S_{2n_2}^{*2}}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

2.4.4 非正态总体的区间估计

1、指数分布参数的估计 $\lambda \sim \bar{X}$ $E\bar{X} = \frac{1}{\lambda}$

结论 设 r.v. $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ 则当

$k>0$ 时 $Y = kX \sim \Gamma(\alpha, \frac{\lambda}{k})$

证：当 $y<0$ 时 $f_Y(y) = 0$

当 $y \geq 0$ 时 $f_Y(y) = f_X(\frac{y}{k})\frac{1}{k} = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(\frac{y}{k})^{\alpha-1} e^{-\lambda\frac{y}{k}} \cdot \frac{1}{k}$

$= \frac{(\frac{\lambda}{k})^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{k}y}$

表明 $Y \sim \Gamma(\alpha, \frac{\lambda}{k})$

$X_i \sim Exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$

$2n\lambda\bar{X} = 2n\lambda \cdot \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \boxed{\sum_{i=1}^n \overset{k}{(2\lambda)} X_i} \sim \Gamma(n, \frac{1}{2})$

$\sim \Gamma(n, \frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{2n}{2}, \frac{1}{2}) = \chi^2(2n)$

$$\chi^2 = 2n\lambda\bar{X} \sim \chi^2(2n)$$

2、0-1分布参数的区间估计. $X_i \sim B(1, p)$

$$U = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - p)}{\sqrt{p(1-p)}}$$ 该分布与p有关.

由中心极限定理得

n充分大时, $U \sim N(0,1)$

3. 大样本条件下总体均值的区间估计.

n充分大时 $U = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

2.4.5 单侧区间估计

$$P\{\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)<\theta\}\geq 1-\alpha$$

单侧置信下限 $(\underline{\theta},+\infty)$ 单侧置信区间.

$$P\{\theta<\bar{\theta}(X_1,\cdots,X_n)\}\geq 1-\alpha.$$

$(-\infty,\bar{\theta})$.

例如 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ σ^2未知

$$T=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n-1)$$

$$P\{T<t_{\alpha}(n-1)\}=1-\alpha$$

$\Downarrow$

$$P\{\bar{X}-\frac{S^*}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)<\mu<+\infty\}=1-\alpha.$$

单侧置信下限.

第3章 假设检验

3.1 假设检验的基本概念

假设检验：对总体或总体性质提出假设，利用样本进行检验。

$\begin{cases} \text{参数假设检验} \\ \text{非参数假设检验} \end{cases}$

假设：$\begin{cases} \text{原假设 } H_0: \theta \in \Theta_0 \\ \text{备择假设 } H_1: \theta \in \Theta_1 \end{cases}$ 对立假设

$\begin{cases} \text{简单假设（对应）} \\ \text{复合假设} \end{cases}$

假设检验思想

1° 先假设 H_0 正确，在此假设上

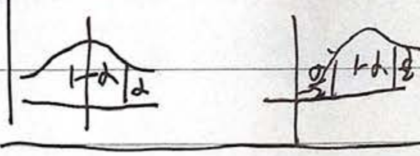
2° 构造某事件 A（它在 H_0 正确条件下概率很小）

eg $P(A|H_0)=\alpha$

3° 进行试验，若A发生，等价说一个小概率事件居然发生了，否定 H_0。

小概率事件原理

小概率事件在一次试验（或观察中）是几乎不可能发生的



检验规则：

W — 拒绝域　　W^c — 接受域

检验函数 $\delta(\cdot)$

$$\delta(x)=\begin{cases} 0, & x\in W \\ 1, & x\notin W \end{cases}$$

两类错误

第Ⅰ类错误（弃真错误）$P_\theta(W)$，$\theta\in\Theta_0$　　H_0 为真，而样本值落在拒绝域

第Ⅱ类错误（存伪错误）$P_\theta(W^c)$，$\theta\in\Theta_1$

控制（减小）第Ⅰ类错误的概率。
（自然提高了Ⅱ类的概率，对立的）

功效函数：（样本落入拒绝域的概率）

$$\beta_\delta(\theta) \triangleq P_\theta(W)=E_\theta[\delta(x)],\ \theta\in\Theta$$

显著水平 α，

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} \beta_\delta(\theta)\le\alpha$$

α：弃真的概率???

枢轴量 ⟷ 检验统计量

置信度 $1-\alpha$ ⟷ 显著性水平 α

区间估计 ⟷ 拒绝域

区间估计　　假设检验

P102　成立时 统计量有什么性质 来确定 W
用 E() 来看？一只是为了找出

步骤：

(1) 提出 H_0、H_1

(2) 构造 检验统计量 Z — 不含未知参数. H_0成立前提下可确定Z的概率.

(3) 确定拒绝域 W　$P_{H_0}\{W\}\le\alpha$.

(4) 抽样.

我认为. 统计量建立起 假设(或 $\theta\in\Theta$)与样本的关系 (在水平α的条件下). $X\in W$

二次认为 样本代替掉了参数 另外拒绝域. P97, P108
估计量

3.2 正态总体参数的假设检验

3.2.1 一个正态总体的情形

1. μ的检验.　$H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu\neq\mu_0$

(1) σ^2 已知. — U检验.

H_0成立时 ⟶ $$U=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma_0}\sim N(0,1)$$

$$W=\{|U|\geq u_{\alpha/2}\}$$

(当 H_1成立时 $|\bar{X}-\mu_0|\geq c_0$). — 绝对值个值

$P_{H_0}\{W\}\leq\alpha$.

(2) σ^2未知. — t检验.

$$T=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S^*}\sim t(n-1)$$

$$W=\{|T|\geq t_{\alpha/2}(n-1)\}$$

2. σ^2的检验.　$H_0: \sigma^2=\sigma_0^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2\neq\sigma_0^2$

(1) μ已知 (自证)

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n).$$

(2) μ未知 — χ^2检验.

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

$$W=\{\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cup\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$$

3.2.2 两个正态总体的情形

1、$\mu_1-\mu_2=C$ 的检验.（C 已知）

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$. — t检验.

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-C}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

$$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_{1n_1}^{*2}+(n_2-1)S_{2n_2}^{*2}}{n_1+n_2-2}}$$

$$W=\{|T|\ge t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\}$$

2、$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=C$ 的检验.

(1) μ_1,μ_2已知.（自证）

$$F=\frac{\sigma_2^2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{C\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\sim F(n_1,n_2)$$

(2) μ_1,μ_2未知 — F检验.

$$F=\frac{S_{1n_1}^{*2}}{CS_{2n_2}^{*2}}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$ —性质. $E(F)=\frac{n_2-1}{n_2-3}$

∴ H_0成立时. F应在$E(F)$附近.

$$W=\{F\le F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\cup F\ge F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\}$$

3.3 非正态总体参数的假设检验

3.3.1 指数分布的假设检验

$$H_0: \lambda=\lambda_0 \longleftrightarrow H_1: \lambda \neq \lambda_0$$

$$\chi^2 = 2n\lambda_0\overline{X} \sim \chi^2(2n)$$

$$W=\{2n\lambda_0\overline{X} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(2n) \cup 2n\lambda_0\overline{X} \ge \chi^2_{\alpha/2}(2n)\}.$$

3.3.2 大样本条件下的参数假设检验. $(n\to\infty)$

例. $U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\sim} N(0,1)$

$$U=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-c}{\sqrt{\frac{S_{1n_1}^2}{n_1}+\frac{S_{2n_2}^2}{n_2}}} \overset{n\to\infty}{\sim} N(0,1).$$

3.4 单侧假设检验.

单侧假设/单边假设.

例 $H_0: \theta \le \theta_0 \longleftrightarrow H_1: \theta > \theta_0$

复合假设 $H_0: \mu \ge \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$

简单 $\mu=\mu_0$ $P\{U \le ?\} < \alpha$.

所得检验规则相同

大部分符号相同?!

等号成立时选为H_0

除 $H_0: \lambda \le \lambda_0 \leftrightarrow H_1: \lambda > \lambda_0$

$W=\{2n\lambda_0\overline{X} \le \chi^2_{1-\alpha}(2n)\}$

3.5 非参数假设检验

3.5.1 分布假设检验.

1. χ^2 拟合检验.

H_0：X的分布函数 $F=F_0$　　　　n指总体n个样本

$\sum_{i=1}^{r}\frac{n}{p_i}\left(\frac{m_i}{n}-p_i\right)^2$

$$k_n=\sum_{i=1}^{r}\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}=\sum_{i=1}^{r}\frac{m_i^2}{np_i}-n\sim\chi^2(r-1)$$

$W=\{k_n\geq\chi^2_\alpha(r-1)\}$　　　　r为分成r个子集(区间)

我认为思路：将X分为r个区间，使样本落在每个区间的概率与理论相等

k_n为实际频率与理论频率加权平方和　　　　要求理论频数 $np_i\geq5$

若小于5则将区间合并

证明 对 $r=2$

$$S\to S_1,\ S_2$$

频数 m_1　m_2

$m_1\sim b(n,p_1)$　　　$m_1-np_1=(n-m_2)-n(1-p_2)=np_2-m_2$

且 $p_1+p_2=1$，$m_1+m_2=n$

$$k_n=\frac{(m_1-np_1)^2}{np_1}+\frac{(m_2-np_2)^2}{np_2}=\frac{(m_1-np_1)^2p_2+(m_2-np_2)^2p_1}{np_1p_2}=\frac{(m_1-np_1)^2}{np_1p_2}\sim\chi^2(1)=\chi^2(r-1)$$

$$\frac{m_1-np_1}{\sqrt{np_1p_2}}\xrightarrow{L}N(0,1)\quad n\to\infty$$

分类数据的拟合优度检验

H_0：S_i 所占比例为 p_i $(i=1,\cdots,r)$

设总体X为取有限或可列个值 $a_1,a_2,\cdots$

把相邻的某些 a_i 合并为一类，使得 $a_1,a_2\cdots$ 被分为有限个类 $S_1,\cdots S_r$.

并使样本观测值 $X_1,\cdots,X_n$ 落入每个 S_i 内个数 m_i 不小于5. 记 $P(X\in S_i)=p_i$ $(i=1,2,\cdots r)$

做法：X为连续 r.v.

选 $r-1$ 个数 $a_1<a_2<\cdots<a_{r-1}$ $\qquad S \to S_1 \cdots S_r$ $\qquad a_0=-\infty$

把实数轴分为 r 个区间 $\quad a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{r-1}$ $\quad m_i$ $\qquad a_r=+\infty$

S_1: $(-\infty,a_1]$ $\quad S_2$: $(a_1,a_2]$ $\cdots$ S_r: (a_{r-1},∞)

当观测值落入第 i 个区间，看作它属于第 i 类.

在 H_0 成立 $p_i=P(a_{i-1}<X\le a_i)=F_0(a_i)-F_0(a_{i-1})$ $\quad i=1,2,\ldots,r$.

$H_0: F=F_0$

若 F_0 含 K 个未知参数 $\quad$ 先用参数的极大似然估计去代替.

$K_n\sim\chi^2(r-k-1)$ $\qquad$ 正态总体的极大似然估计 $\hat{\mu}=\bar{X}$, $\hat{\sigma}^2=S^2$

---

2. 柯尔莫哥洛夫检验 （分布函数 $F(x)$ 要连续，且不含未知参数）

思想：n 很大时 $F_n(x)$ —样本经验分布函数 为 $F(x)$ 的很好近似.

$$D_n=\sup_{-\infty<x<+\infty}|F_n(x)-F(x)|\xrightarrow{a.s.}0 \qquad n\to\infty$$

→将大数定律变得更强（变为一致）

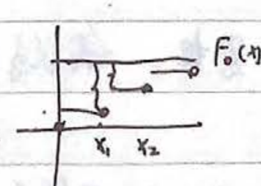
$H_0: F(x)=F_0(x)$

$$D_{n\alpha}\approx\frac{\lambda_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \qquad W=\{D_n\ge D_{n\alpha}\}$$

步骤 (1) 样本值 $x_1,\cdots,x_n$ 排序

(2) 计算经验分布 $F_n(x)$，和 $F_n(x_i)$ $\quad i=1,\cdots,n$

$$d_i=\max[|F_n(x_{i-1})-F_0(x_i)|, |F_n(x_i)-F_0(x_i)|]$$



约定 $F_n(x_0)=0$.

(3) $D_n=\sup_{-\infty<x<+\infty}|F_n(x)-F_0(x)|=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$

(4) 检验

3.5.2 两个总体之间关系的假设检验

1. 斯米尔诺夫检验.

$$H_0: F=G \longleftrightarrow H_1: F\neq G$$

连续、样本 $X_1,\cdots,X_{n_1}$（F）　$Y_1,\cdots,Y_{n_2}$（G）

$$D_{n_1,n_2} \triangleq \sup_{-\infty<x<+\infty} |F_{n_1}(x) - G_{n_2}(x)|$$

$$W=\{D_{n_1,n_2} \geq D_{n_1,n_2,\alpha}\}$$　取 $n=\left[\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}\right]$ 取整.

$n\leq 100$　$D_{n_1,n_2,\alpha}\approx D_{n,\alpha}$

$n>100$　$D_{n_1,n_2,\alpha}\approx \frac{\lambda_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$

2. 独立性检验.（利用 χ^2 拟合检验.

$$H_0: F(x,y)\equiv F_X(x)F_Y(y) \longleftrightarrow H_1: F(x,y)\neq F_X(x)F_Y(y)$$

分成 r 份　分成 s 份

$$H_0: p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j} \quad i=1,\cdots,r;\ j=1,\cdots,s$$

$p_{i\cdot}, p_{\cdot j}$ 共 $r+s-2$ 个未知参数. 用极大似然估计 $\hat{p}_{i\cdot}=\frac{n_{i\cdot}}{n}$　$\hat{p}_{\cdot j}=\frac{n_{\cdot j}}{n}$

$$K_n=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(n_{ij}-n\hat{p}_{ij})^2}{n\hat{p}_{ij}}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(n_{ij}-n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j})^2}{n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\left(n_{ij}-\frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}}$$ [illegible]

$$\sim \chi^2(\underbrace{(r-1)(s-1)}_{rs-(r+s-2)-1}) \qquad = n\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^2}{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}-1\right)$$

$$W=\{K_n\geq \chi^2_\alpha((r-1)(s-1))\}$$

思想：我认为 $F=F_0$ —— χ^2 拟合检验

$F \to F(x,y)$，$F_0 \to F_X(x)F_Y(y)$

$r=s=2$ 时. 四格表

n_{11}	n_{12}	$n_{1\cdot}$
n_{21}	n_{22}	$n_{2\cdot}$
$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	

$$K_n=\frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1\cdot}n_{2\cdot}n_{\cdot 1}n_{\cdot 2}}$$　$W=\{K_n\geq\chi^2_\alpha(1)\}$.

第4章 方差分析与正交试验设计

4.1 单因素方差分析 ⟶ 多个总体均值是否相同

前提：正态总体，同方差，独立样本.

总偏差平方和：

$$Q_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{r}n_i(\overline{X}_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2$$

组间平方和 $Q_A=\sum_{i=1}^{r}n_i(\overline{X}_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{r}n_i(\delta_i+\overline{\varepsilon}_i-\overline{\varepsilon})^2$

组内平方和 $Q_E=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(\varepsilon_{ij}-\overline{\varepsilon}_i)^2$

$$EQ_A=\sum_{i=1}^{r}n_i\delta_i^2+(r-1)\sigma^2$$

$$EQ_E=\sum_{i=1}^{r}(n_i-1)\sigma^2=(n-r)\sigma^2$$

对 EQ_A.

$\overline{\varepsilon}_i\sim(0,\frac{\sigma^2}{n_i})$ $\overline{\varepsilon}\sim(0,\frac{\sigma^2}{n})$

$E(\overline{\varepsilon}^2)=D(\overline{\varepsilon})$

证：$E\left(\sum_{i=1}^{r}n_i(\overline{\varepsilon}_i-\overline{\varepsilon})^2\right)$

$=E\left(\sum_{i=1}^{r}n_i\overline{\varepsilon}_i^2+\sum_{i=1}^{r}n_i\overline{\varepsilon}^2-\sum_{i=1}^{r}2n_i\overline{\varepsilon}_i\overline{\varepsilon}\right)$

$=\sum_{i=1}^{r}n_i\frac{\sigma^2}{n_i}+\sum_{i=1}^{r}n_i\frac{\sigma^2}{n}-2E\left(\overline{\varepsilon}\underbrace{\sum_{i=1}^{r}n_i\overline{\varepsilon}_i}_{n\overline{\varepsilon}}\right)$

$=r\sigma^2+\sigma^2-2\sigma^2=(r-1)\sigma^2.$

对 EQ_E:

$\varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2)$ $\overline{\varepsilon}_i=\frac{1}{n_j}\sum_{j=1}^{n_i}\varepsilon_{ij}$

$E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=(n-1)\sigma^2.$

↓

构造统计量

$$F=\frac{Q_A/(r-1)}{Q_E/(n-r)}\sim F(r-1,n-r)$$

证明：

柯赫伦定理.

求自由度方法:

设实二次型 $f(x_1, x_n) = \sum_{i=1}^{s}(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n)^2$

证 $f(x_1, \cdots x_n)$ 的秩等于矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$ 的秩

自由度-计算某一统计量时,取值不受限制的变量个数

$$f(x_1, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1i}x_1x_i)$$

$$(x_1 \cdots x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} a_{ii}x^2 + \cdots$$

方差分析表.

方差来源	平方和	自由度	均方和	F值
因素A (组间)	Q_A	$r-1$	$\overline{Q_A} = \frac{Q_A}{r-1}$	$F = \frac{\overline{Q_A}}{\overline{Q_E}}$
误差E (组内)	Q_E	$n-r$	$\overline{Q_E} = \frac{Q_E}{n-r}$	
总和	Q_T	$n-1$		

未知参数估计

$$\hat{\mu} = \overline{X}$$

$$\hat{\mu}_i = \overline{X}_i$$

$$\hat{\delta}_i = \overline{X}_i - \overline{X}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{Q_E}{n-r} = \overline{Q_E}$$

对 $\mu_i - \mu_k$ 区间估计

不同水平对应总体间 $T = \dfrac{\overline{X}_i - \overline{X}_k - (\mu_i - \mu_k)}{\sqrt{(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_k})\overline{Q_E}}} \sim t(n-r)$

$$P\{|T| < t_{\alpha/2}(n-r)\} = 1-\alpha$$

$1-\alpha$ 的置信区间为 $(\overline{X}_i - \overline{X}_k \mp t_{\alpha/2}(n-r)\sqrt{(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_k})\overline{Q_E}})$

4.2 双因素方差分析

1. 等重复 $l>1$　　2. 无重复 $l=1$

交互效应

4.3 正交试验设计

正交表

不考虑交互作用
考虑交互作用

首先看水平数

自由度与正交表

(1) 正交表的总自由度 $f_{总}$ = 试验次数 − 1
正交表每列的自由度 $f_{列}$ = 此列水平数 − 1

(2) 因数A的自由度 f_A = 因素A的水平数 − 1
A、B 间交互作用的自由度 $f_{A\times B} = f_A \times f_B$

因素 因素+交互 自由度 ≤ 正交表自由度

1. 直观分析（极差分析）

T　因素某一水平对应指标之和.

R

水平数不等时　$\overline{T}_{ij} = T_{ij} / \left(\frac{n}{s_j}\right)$

2、方差分析.

分解　$Q_T = Q_A + Q_B + \cdots + Q_{B\times C} + \cdots + Q_e$.

$Q_T = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$

$Q_{j\,(j=A,B\cdots)} = \frac{s_j}{n}\sum_{i=1}^{s_j} T_{ij}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{s_j} T_{ij}\right)^2$

$A\times B$ 之占一列时也按上表计算.

第五章 回归分析

5.1 一元线性回归

5.1.1 模型

$$y = a + bx + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

y的数学期望 — $\mu(x) = E(y|x) = a + bx$

y关于x的回归函数

5.1.2 参数估计

1. a, b 最小二乘估计

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

经验回归：$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x = \bar{y} + \hat{b}(x - \bar{x})$

2. σ^2 估计

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 - \frac{\hat{b}^2}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

5.1.3 概率分布

$$l_{xx} \triangleq \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

$$l_{yy} \triangleq \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

$$l_{xy} \triangleq \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i$$

1. $\hat{b}$ 的分布

$$\hat{b} \sim N\left(b, \frac{\sigma^2}{l_{xx}}\right)$$

2. $\hat{a}$ 的分布 . $\hat{a} \sim N\left(a, \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{l_{xx}}\right]\sigma^2\right)$

3. $\hat{\sigma}^2$ 的分布. $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} Q_e$

残差平方和 $Q_e = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2$

(1) $\frac{Q_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$

(2) $\bar{y}, \hat{b}, Q_e$ 相互独立.

$$\hat{\sigma}^{*2} = \frac{Q_e}{n-2}$$ $\hat{\sigma}^{*2}$ 为 σ^2 的无偏估计

$\hat{\sigma}^{*2} = \frac{n}{n-2}\hat{\sigma}^2$ $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 渐近~

5.1.4 一元线性回归的假设检验（判断线性回归是否显著）

$H_0: b=0$

$$t = \frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}^*}\sqrt{l_{xx}} \sim t(n-2)$$

$$W = \{|t| \geq t_{\alpha/2}(n-2)\}$$

第一方法

$$Q_e = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 - \hat{b}^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$\Big\downarrow$ 变

相关系数 $r \triangleq \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx} l_{yy}}}$

$0 < |r| < 1$.

$r=1$ 时 确定的线性函数关系

5.1.5 预测

点预测

$x = x_0$ 时

$$\hat{y}_0 = \hat{a} + \hat{b}x_0 = \bar{y} + \hat{b}(x_0 - \bar{x})$$

$$t = \frac{y_0 - \hat{y}_0}{\hat{\sigma}^* \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{l_{xx}}}} \sim t(n-2)$$

$$P\{|t| < t_{\alpha/2}(n-2)\} = 1 - \alpha.$$

$$P\{\hat{y}_0 - \delta(x_0) < y_0 < \hat{y}_0 + \delta(x_0)\} = 1 - \alpha.$$

$$\delta(x_0) = t_{\alpha/2}(n-2)\, \hat{\sigma}^* \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{l_{xx}}}$$

y_0 的置信度为 $1-\alpha$ 的预测区间是 $(\hat{y}_0 - \delta(x_0), \hat{y}_0 + \delta(x_0))$.

$x = \bar{x}$ 时 预测精确度最好.

x 在 $\bar{x}$ 附近时 $\delta(x) \approx u_{\alpha/2}\hat{\sigma}^*$.

/ /

5.2 多元线性回归.

5.2.1 模型.

$$\mu(x_1, \cdots, x_k) = E(y \mid x_1, \cdots, x_k)$$

$$y = b_0 + b_1x_1 + \cdots + b_kx_k + \varepsilon, \ \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

k 元线性回归模型.

n 组数.

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Y = XB + \varepsilon \\ \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n) \end{cases}$$

5.2.2 参数估计

$$\hat{B} = (X^TX)^{-1}X^TY \qquad \hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1x_1 + \cdots + \hat{b}_kx_k$$

$$\hat{\sigma}^{*2} = \frac{Q_e}{n-k-1}$$ 是 σ^2 的无偏估计.

多项式回归模型 $y = b_0 + \cancel{b_1 x} + \underbrace{b_1 x}_{x_1} + \underbrace{b_2 x^2}_{x_2} + \cdots + \varepsilon \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$

5.2.3 参数估计量的分布及性质.

性质 1. $\hat{B} \sim N_{k+1}(B, \sigma^2(X^TX)^{-1})$.

2. $\hat{B}$ 是 B 的最优线性无偏估计. (最优指 $\hat{B}$ 是有最小协方差)

3. $Ee = 0$, $cov(e, e) = \sigma^2[I_n - X(X^TX)^{-1}X^T]^T$ e 与 $\hat{B}$ 不相关

$e = Y - X\hat{B}$

4. $E(e^Te) = \sigma^2(n-k-1)$

5. (1) $\begin{pmatrix} \hat{B} \\ e \end{pmatrix}$ 为正态向量且 $\hat{B}$ 与 e 相互独立.

(2) $\hat{B}$ 与 Q_e 相互独立.

(3) $\frac{Q_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k-1)$

5-2.4 多元线性回归的假设检验

回归方程的

1. 显著性检验

$\cancel{Q_r = \sum_{i=1}^{n}}$

$$Q_t = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}_{Q_r} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}_{Q_e}$$

$$Q_t = Q_r + Q_e$$

$$F = \frac{Q_r/k}{Q_e/(n-k-1)} \sim F(k, n-k-1)$$

H_0: $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$

$$W = \{F \geq c\} \quad c = F_\alpha(k, n-k-1)$$

2. 回归系数的显著性检验

$$C = (X^T X)^{-1}$$

C_{jj} 为主对角线上第 j+1 个元素　C_{00} 为第1个.

H_0: $b_j = 0$

$$t_j = \frac{\hat{b}_j/\sqrt{C_{jj}}}{\sqrt{Q_e/(n-k-1)}} \sim t(n-k-1)$$

$$W_j = \{|t_j| \geq t_{\alpha/2}(n-k-1)\}$$

5.2.5 预测

点 $\hat{y}_0 = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_{01} + \cdots + \hat{b}_k x_{0k}$

区间 $$t = \frac{y_0 - \hat{y}_0}{\sqrt{1+\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} C_{ij} x_{0i} x_{0j}}\sqrt{\frac{Q_e}{n-k-1}}} \sim t(n-k-1).$$

$$P\{|t| \leq t_{\alpha/2}(n-k-1)\}.$$

第6章 统计决策与贝叶斯推断

6.1

样本 $\longrightarrow$ 行动 $d(x)$ $\longrightarrow$ 损失函数 $L(\theta, d(x))$ $\rightarrow$ 风险 $R(\theta,d)$

最大最小决策函数

后验分布 $\pi(\theta|x) = \dfrac{\pi(\theta)p(x|\theta)}{m(x)} = \dfrac{\pi(\theta)p(x|\theta)}{\int_\Theta \pi(\theta)p(x|\theta)d\theta}$

贝叶斯后验风险.

6.2 贝叶斯推断.

1) 贝叶斯估计.

点估计.

后验期望估计.

$\pi(\mu|x) \propto \pi(\mu)p(x|\mu)$ 核. $p(x|\mu)$ 为 X 取到 $x_1 \cdots x_n$ 的概率.(即似然)

关于μ的分布.

求出 $\mu|x$ 的分布

$\hat{\mu} = E(\mu|x)$

参数空间.

$p(x|\theta) = L(\theta)$

最大后验估计, 后验众数估计.

对 $\pi(\mu|x)$ 求导 (可取对数后)

后验中位数估计

求出 $\mu|x$ 的分布函数 F, 令 $F=\frac{1}{2}$

2. 区间估计.

求出 $\mu|x$ 后验的分布. 直接求出 $\mu|x$ 的区间

例 $\mu|x \sim N(0,1)$ $P\{|\mu| < u_{\frac{\alpha}{2}} | x\} = 1-\alpha$.

2) 贝叶斯假设检验.

$H_0: \mu \leq 1 \leftrightarrow H_1: \mu > 1$

求出 $\mu|x$ 的分布后，直接求出在以上区间的概率比较

3) 先验分布的选取.

1. 无先验信息 分布 $\underline{\pi(\theta) \propto 1}$.

2. 共轭先验分布

$\pi(\theta|x)$ 与 $\pi(\theta)$ 是同一个类型