Date. /

概率 基础

Ch1 随机事件及概率

一、随机事件

(一) 随机事件　　　　骰子 shǎi tóu

1. 随机试验

(1) 可重复进行；

(2) 所有结果事先已知；

(3) 具体结果事先未知.

2. 样本点 ω：单一个基本可能结果（元素）

样本空间 Ω (或 S)：随机试验的所有可能结果组成的集合(全集)

3. 随机事件：直观上指有可能发生，也有可能不发生的随机现象

(发生过了吗？还没发生!)

·数学上指 Ω 的子集

A、B 或 A_i, $i=1,2,\cdots$ 等表示.

注：A 发生当且仅当 A 中的某一样本点出现

例. 掷两枚骰子，观察出现的点数之和.

$\Omega=\{2,3,\cdots,12\}$

本人做东，$A=\{5,9\}$

对家做东 $B=\{3,7,11\}$

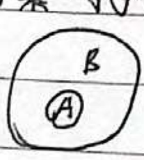
4. Φ：不可能事件.

Ω：必然事件

二、事件的关系与运算

1. 三种关系，四种运算

(1) 子集 子事件：A 发生必导致 B 发生 $\Longleftrightarrow A\subset B$

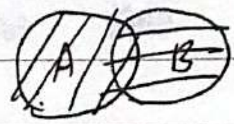


Date.　　/

(2) 相等：$A=B \Leftrightarrow A\subset B$ 且 $B\subset A$.

如：{点数之和 ≤ 3} $=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$

(3) 并事件：A和B至少有一个发生 $\Leftrightarrow A\cup B$



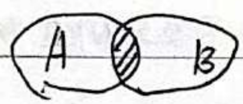
注1：A发生或B发生 $\Leftrightarrow A\cup B$

注2：$A\cup B\cup C$，$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \triangleq A_1\cup A_2\cup\cdots A_n$.

~~四~~ 注3：有的书上 $A\cup B \triangleq A+B$

不开考 出题 一般用 $A\cup B$

(4) 交事件：A和B都(同时)发生 $\Leftrightarrow A\cap B$.(或AB)

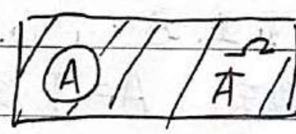


注：$A\cap B\cap C \triangleq ABC$

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \triangleq A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$

(5) 对立事件：若A,B满足：

$A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\phi$，称B为A的对立事件，记为 $B=\bar{A}$



注1. $\bar{A} \Leftrightarrow$ A不发生

注2. $A\bar{A}=\phi$ 且 $A\cup\bar{A}=\Omega$

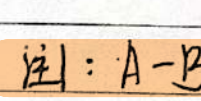
注3：$\bar{A}=\Omega-A$

$\ne 1-A$ (无意义)

数　集合

$P(\bar{A})=1-P(A)$ ✓

(6) 差事件：A发生但(而)B不发生 $\Leftrightarrow A-B$



注1：$A-B = A\bar{B} = A-AB$

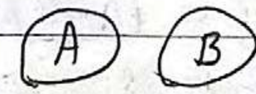
注2：$A-B = A-AB$

高数中 $\Rightarrow B=AB$　　线代中：$\Rightarrow B=AB$

概率中 $\nRightarrow -B=-AB$ (没有负事件一说)

注3. $A-AB \neq A(1-B)$ （概率中无意义）

(7) 互斥（也叫互不相容）



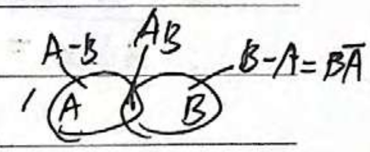
A,B互斥 $\Leftrightarrow AB=\phi$

注1. 斥：排斥.

注2. A,B互斥 $\not\Leftrightarrow$ A,B对立.

$\Updownarrow$　　　　$\Updownarrow$

$AB=\phi$　　　$AB=\phi$ 且 $A\cup B=\Omega$



注3. A和B至少有一个发生 $\Leftrightarrow A\cup B$

$\Leftrightarrow A\bar{B}\cup B\bar{A}\cup AB$

A,B恰好发生一个　A,B都发生.

$A\bar{B},\ B\bar{A},\ AB$

补例. A：甲来　B：乙来

(1) 甲，乙至少到一个：$A\cup B$

(2) 甲到乙没到：$A-B=A\bar{B}$

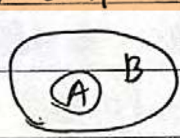
(3) 甲，乙恰好到一个：$\underbrace{A\bar{B}\cup B\bar{A}}_{\text{互斥}}$

(4) 甲，乙都没到：$\bar{A}\bar{B}$

注：$\Omega = AB\cup A\bar{B}\cup\bar{A}B\cup\bar{A}\bar{B}$

2. 事件的运算律 P2

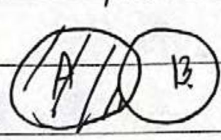
吸收律：$A\subset B \Rightarrow \begin{cases} AB=A \\ A\cup B=B \end{cases}$



注：$A\bar{B}\subset A\subset A\cup B$

$\therefore A\bar{B}\cap A=A\bar{B},\quad A\bar{B}\cup A=A$

$AB\cup A=A$



☆

Date. /

分配律：

$(A\cup B)\cap C = \underbrace{(A\cap C)\cup(B\cap C)}_{提出\cap C}$ 考试从右往左考

$(A\cap B)\cup C \quad \underbrace{(A\cup C)\cap(B\cup C)}_{提出\cup C}$

德·摩根律(对偶律)

$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}$ ， $\overline{AB}=\underbrace{\bar{A}\cup\bar{B}}_{至少有一个发生}$

注1. $\bar{A}\bar{B}\neq\overline{AB}$

注2. $\overline{A\cup B\cup C}=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

$\overline{ABC}=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$

例1-2 中. $\Omega = A_1A_2A_3$

$\boxed{2\times2\times2}$ $\cup A_1A_2\bar{A_3}\cup A_1\bar{A_2}A_3\cup\bar{A_1}A_2A_3$

$\cup A_1\bar{A_2}\bar{A_3}\cup\bar{A_1}A_2\bar{A_3}\cup\bar{A_1}\bar{A_2}A_3$

$\cup\bar{A_1}\bar{A_2}\bar{A_3}$

(1) $B_1=A_1\bar{A_2}\bar{A_3}$

注第一个是合格品 $A_1=A_1A_2A_3\cup A_1A_2\bar{A_3}\cup A_1\bar{A_2}A_3\cup A_1\bar{A_2}\bar{A_3}$

$=A_1\Omega$

(2) $B_2=A_1\bar{A_2}\bar{A_3}\cup\bar{A_1}A_2\bar{A_3}\cup\bar{A_1}\bar{A_2}A_3$

(3) 有一个合格，至少有

$B_3=A_1\cup A_2\cup A_3=\Omega-\bar{A_1}\bar{A_2}\bar{A_3}$

(4) $B_4=A_1(\bar{A_2}\cup\bar{A_3})$

$=A_1(\overline{A_2A_3})$

$=A_1-A_2A_3$

$=A_1-A_1A_2A_3$

$\neq A_1\underbrace{(1-A_2A_3)}_{无意义}$

$A\bar{B}=A-B$

$=A-AB$

B5：最多只有两个合格品

二、概率、古典与几何、五大公式

(一) 概率：直观上指一个事件发生的可能性大小的数量指标.

1.统计定义：

频率的稳定值为概率

注：统计定义只能估计概率

2.公理化定义（大家公认）

$$\Omega \longrightarrow [0,1]$$

$$P: \quad A \longmapsto P(A)$$

且满足：(1) 非负性：$\forall A, 0 \le P(A) \le 1$；

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$

(3) 可列可加性：　$0,1,2,\cdots$　$[0,1]$ 中的数不可列

$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ —— 是两两互不相容的事件.

则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

3、概率的性质

性质1. $P(\phi)=0$,　　$0 \le P(A) \le 1$

注：$P(A\cup B) \le 1$

性质2、A, B 互斥，则

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)$$

性质3. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

性质4：减法公式

$P(A-B) = \cancel{P(A\overline{B})}\ P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$

证　$A = A\Omega = A(B\cup\overline{B}) = AB \cup A\overline{B}$ —— 互斥

$\therefore P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$

$\Rightarrow P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$

注：若 $B \subset A$，则 $P(A-B) = P(A) - P(B)$

$\therefore$ 若 $B \subset A$，则 $P(B) \le P(A)$

Date.　　/

如 $AB \subset A \subset A\cup B$

故 $P(AB) \le P(A) \le P(A\cup B)$

若 $P(A)=0$，则 $P(AB)=0 \Rightarrow P(ABC)=0$

性质5，加法公式

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(AB)$$

证：$A\cup B = \underbrace{A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup AB}_{\text{两两互斥}}$

$\therefore P(A\cup B) = P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)+P(AB)$

$= P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)+P(AB)$

$= P(A)+P(B)-P(AB)$

注：$P(A\cup B\cup C)=$? 推广

互斥让加法公式变得简单

例1.3 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$　$P(A)=p$ 则 $P(B)$?

解：思路，去单？　$\boxed{P(\bar{A})=1-P(A) \quad P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)}$

$P(\bar{A}\bar{B})$

$=P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A\cup B) = 1-[P(A)+P(B)-P(AB)] = P(AB)$

$\Rightarrow$ $\cancel{P(A)}$ $P(B)=1-P(A)=1-p$

例1.4

解：$P(A,B,C\text{全不发生}) = P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\overline{A\cup B\cup C})$

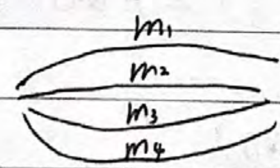
$=1-P(A\cup B\cup C) = 1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)$

$+P(ABC)]$　注：$ABC\subset AB$　$0\le P(ABC)\le P(AB)=0$

(二) 古典，几何

补：排列组合.

(1) 加法原理



分类相加　$m_1+m_2+m_3+m_4$

Date. /

(2) 乘法原理：分步相乘 $\overset{m_1}{\_\_\_}\cdot\overset{m_2}{\_\_\_}\cdot\overset{m_3}{\_\_\_}$

$m_1 \times m_2 \times m_3$

(3) 排列：(考虑顺序)

从n个不同元素中，每次取出m个元素

(每次取一个，共取m次)

$$\begin{cases} 有放回：\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{m个} = n^m \quad \boxed{1 \mid 2 \mid \cdots \mid n} \\ 无放回：n \times (n-1) \cdots [n-(m-1)] = \frac{n!}{(n-m)!} \triangleq A_n^m 或 P_n^m \end{cases}$$

(4) 组合：(不考虑顺序)

从n个不同元素中，每次取出m个元素 不考虑顺序，

共有

$$\frac{n \times (n-1) \cdots (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} \triangleq C_n^m 或 \binom{m}{n}$$

如 $C_6^2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15 \qquad C_4^3 = \frac{4 \times 3 \times 2}{3!} = 4 = C_4^1$

1. 古典

(1) 特征：有限 等可能.

如：抛两枚硬币，观察正反面出现的情况.

$\Omega_1 = \{正正, 正反, 反正, 反反\}$ ← 等可能.

$\Omega_2 = \{两正, 一正一反, 两反\}$

不等可能

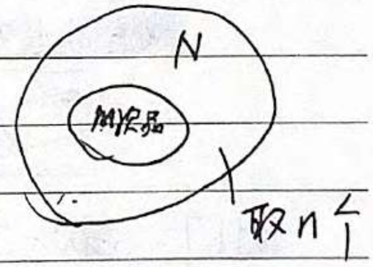
(2) 计算：$P(A) = \frac{A中的样本点数}{\Omega中的样本点数}$.

注：计数，防重复，防漏计

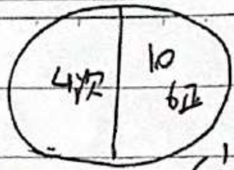
(3) 常用结论.

任取：等可能

$P(恰有k个次品) = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$



例1.5



任取3个

至少有一次品?

法一: $\dfrac{C_4^1 \cdot C_6^2 + C_4^2 \cdot C_6^1 + C_4^3}{C_{10}^3}$

(不考虑次序)

法二: $1-\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3} = 1-\dfrac{\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}}{\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}} = 1-\dfrac{6\times5\times4}{10\times9\times8}$ (考虑次序)

注: 有人: $\dfrac{C_4^1\times C_9^2}{C_{10}^3} = \dfrac{4\times\frac{9\times8}{2\times1}}{\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}} = \cancel{1.2}$

重复了:

C_4^1: 次1 次2 次3 次4

C_9^2: 次2,次3 次1,次3 次1,次2

例1-6 0,5 8个

解: A: 不含0; B: 不含5

(1) $P(A_1) = P(AB) = \dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}$

(2) $P(A_2) = P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(AB)$

$= \dfrac{C_9^3}{C_{10}^3} + \dfrac{C_9^3}{C_{10}^3} - \dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}$

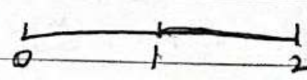
(3) $P(A_3) = P(\overline{A}B) = P(B)-P(AB) = \dfrac{C_9^3}{C_{10}^3} - \dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}$

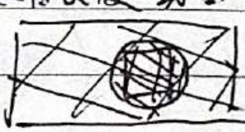
2. 几何概型

(1) 特征: Ω中的样本点无限且构成一个几何区域, 每个样本点等可能.

(2) 计算: $P(A) = \dfrac{A\text{的测度}}{\Omega\text{的测度}}$

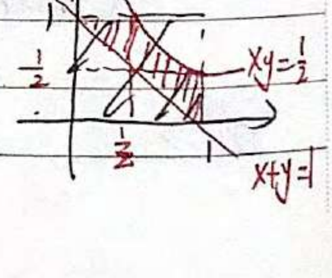
测度指长度或面积.





例1-7 第一个数为x, 第二个数为y,

则 $\Omega = \{(x,y) \mid 0<x<1, 0<y<1\}$



Date. /

$$A=\{(x,y)\mid x+y>1,\ xy<\tfrac{1}{2}\}$$

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[\frac{1}{2x}-(1-x)\right]dx}{1\times1}=\frac{1}{2}\ln 2$$

(三) 条件概率与乘法公式

1.条件概率

定义：已知A发生的条件下，B发生的概率

记为 $P(B|A)$，当

$P(A)\neq 0$ 时，规定 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$

计算：$P(B|A)=\begin{cases}\frac{P(AB)}{P(A)} & 公式法\\ 缩减样本空间直接算 & \end{cases}$

注：$P(AB)$：A，B都发生的概率　　A　B

$P(B|A)$：A发生的条件下B发生的概率

$$P(B)=\frac{P(B\Omega)}{P(\Omega)}=P(B|\Omega)$$

例1-8　6红 | 4白　共 $10\times9=90$ 种

A：第一次取红球，B：第二次取白球

$$P(B|A)=\begin{cases}\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{6\times4}{10\times9}}{\frac{6}{10}}=\dfrac{4}{9}\\ 第一次取完红球的条件下，剩下共5红4白，\end{cases}$$

第二次取到白球为 $\frac{4}{9}$.

2.条件概率的性质：

(1) $0\leq P(A|B)\leq 1$

(3) $P(\bar{A}|B)=1-P(A|B)$

证：$P(\bar{A}|B)=\frac{P(\bar{A}B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(AB)}{P(B)}=1-P(A|B)$

$\underbrace{(4)\ (5)}_{自推}\ (6)$

deli得力

$$\xrightarrow[A]{P(A)}\ \xrightarrow[B]{P(B|A)}\ C$$

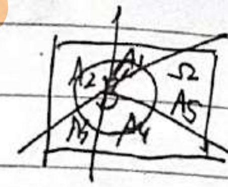
3. 乘法公式：$P(AB)=P(A)P(B|A)$

$P(ABC)=P(A)P(B|A)\cdot P(C|AB)$

(四) 全概率公式与贝叶斯公式

全：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥且 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$

且 $P(A_i)>0$ 则 $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$



证：$B=B\Omega$

$=B(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$

$=BA_1\cup BA_2\cup\cdots\cup BA_n$

$P(B)=P(BA_1)+P(BA_2)+\cdots+P(BA_n)$

$=\sum_{i=1}^{n}P(BA_i)$

$\overset{P(A_i)>0}{=}\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$

注：$P(A_1)$ A_1（原因1） $P(B|A_1)$ 　何时用？

A_2（原因2） —— B（某结果）

$\vdots$

A_n（原因n）

若一随机试验可分为两个阶段，第一阶段有多种可能结果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 求第二阶段某一事件发生的概率，用全概率公式

贝叶斯公式：　不一样

$P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$

例1-10　20黄 30白

解：A_i 表示第 i 次取到黄球，$i=1,2$

法一：古典　$\boxed{\ \ }$取黄

$P(A_2)=P$(黄黄或白黄)$=P$(黄黄)$+P$(白黄)

$=\frac{20\times19}{50\times49}+\frac{30\times20}{50\times49}=\frac{49\times20}{50\times49}$ —— 第二次取黄

法二：$\frac{20}{50}$ 取黄 A_1 $\frac{19}{49}$ 取黄 A_2

$\frac{30}{50}$ 取白 $\bar{A_1}$ $\frac{20}{49}$

$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A_1})P(A_2|\bar{A_1})$

$=\frac{20}{50}\times\frac{19}{49}+\frac{30}{50}\times\frac{20}{49}=\frac{20}{50}$

注：$P(A_1)=\frac{20}{50}$

$P(A_2)=\frac{20}{50}$,

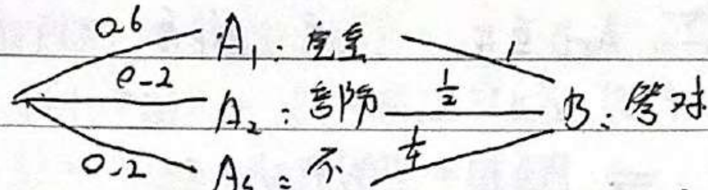
类似 $P(A_3)=\frac{20}{50}$,

这就是生活中的抓阄

原理：n个人抓m个阄 $(m \le n)$

第k个人抓到的概率为 $\frac{m}{n}$

例1.11 ~~A_1：完全 A_2：部分 A_3~~



(1) $P(B) = 0.6\times 1 + 0.2\times\frac{1}{2} + 0.2\times\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(2) $P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{0.1\times 6}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$

注：$P(B|A_1) = 1 \ne P(A_1|B) = \frac{4}{5}$

三、事件的独立性，贝努利概型

(一) 事件独立性

1、定义： A, B独立 $\Longleftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

注：$P(AB) = P(A)P(B|A)$

独立让乘法公式变简单。

A, B独立，则 $P(B|A) = P(B)$

即P A的发生对B无影响（直观上）。

2、结论

(1) A与B，A与$\bar{B}$，$\bar{A}$与B，$\bar{A}$与$\bar{B}$

只要有一对独立，则其它三对独立

证：若$\bar{A}$，$\bar{B}$独立，即

$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) \Rightarrow$

$1 - P(A\cup B) = [1 - P(A)][1 - P(B)]$

$\Rightarrow 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] = [1 - P(A)][1 - P(B)]$

$\Rightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Rightarrow A, B$独立

(2) $P(A) = 0 \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Rightarrow A$与$\forall B$独立

$P(A) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 0 \Rightarrow \bar{A}$与$\forall B$独立

$\Rightarrow A$与$\forall B$独立

Date. /

(3) A, B 独立 $\Leftrightarrow P(A|B)=P(A)$

$\Leftrightarrow P(A|B)=P(A|\bar{B})$

$\Leftrightarrow P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$

3. A, B 独立 $\not\Leftrightarrow$ A, B 互斥　斥：排斥

若 $P(A)>0$ ，$P(B)>0$

A, B 独立 $\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)>0$

$\Rightarrow A, B$ 不互斥.

A, B 互斥 $\Rightarrow P(AB)=0$

$\Rightarrow P(AB)\neq P(A)P(B)$

$\Rightarrow A, B$ 不独立.

注：有人认为"A, B 互斥即 A, B 无交集，从而无影响"了

此推理不对！

$AB=\phi$，A 发生则 B 必不发生

4. A, B, C 两两独立 $\Leftrightarrow \begin{cases} A, B \text{ 独立}; \\ B, C \text{ 独立}; \\ A, C \text{ 独立}; \end{cases}$

$\uparrow \not\downarrow$

5. A, B, C 相互独立 $\Leftrightarrow \begin{cases} A, B, C \text{ 两两独立}; \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$

例1.12. $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$　$\Omega=\{1,2,3,4\}$

$A=\{1,2\}$，$B=\{1,3\}$；$C=\{1,4\}$

$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$P(AB)=P(\text{取到}1)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)$

$P(AC)=P(A)P(C)$，$P(BC)=P(B)P(C)$

$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)$

$\therefore A, B, C$ 两两不相互独立

注，A发生，C发生吗？未必　独立

B

A、B都发生，C发生吗？$AB\subset C$　C一定发生，$\therefore AB$ 与 C不独立.

例1.13

解：$P(A\overline{B}) = P(B\overline{A})$ 且 A,B 独立

$\cancel{P(A\overline{B})}$ $P(\overline{A}\,\overline{B}) = \frac{1}{9}$ $P(A) = ?$

$P(A)P(\overline{B}) = P(B)P(\overline{A})$

$\Rightarrow P(A)[1-P(B)] = [1-P(A)]P(B)$

$\Rightarrow P(A) = P(B) \Rightarrow P(\overline{A}) = P(\overline{B})$

$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = [P(\overline{A})]^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}$

注. $P(A\overline{B}) = P(B\overline{A})$

$\Rightarrow P(A) - \cancel{P(AB)} = P(B) - \cancel{P(AB)} \Rightarrow P(A) = P(B)$

例1.14

记 $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$

解.

(A) $P[(\overline{A\cup B})C] = P(C) - P[(A\cup B)C]$

$= P(C) - P(AC\cup BC)$

$= P(C) - [P(AC) + P(BC) - P(ABC)]$

$= P(C) - [P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C)]$

$= P(C)[1-(P(A)+P(B)-P(AB))]$

$= P(C)P(\overline{A\cup B})$

(B) $AC \subset C \Rightarrow \overline{AC} \supset \overline{C}$

$\therefore$ $\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$ 不独立.

注：结论：若 A,B,C 相互独立，则 A,B 的运算结果与 C 均独立

(二) 贝努利概型

1. 贝努利试验：只有两个结果 A，$\overline{A}$

2. 独立试验，各次试验的结果相互独立.

3. n 次重贝努利试验：

将一贝努利试验独立重复进行 n 次.

每次 $P(A)=P$，则 n 次中 A 发生 k 次的概率为：$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

Date. /

例1.15 甲：2/3， 乙：1/3

最终甲胜的概率

甲甲甲：$(\frac{2}{3})^3$ A_3.

打了四局甲胜：A_4

~~甲甲甲乙~~

甲甲乙甲

甲乙甲甲

乙甲甲甲

$\left.\begin{matrix} \text{甲甲乙甲} \\ \text{甲乙甲甲} \\ \text{乙甲甲甲} \end{matrix}\right\}$ 前三局甲胜两局且第四局甲胜

则 $P(A_4) = \begin{cases} C_4^3 \times (\frac{2}{3})^3 \times \frac{1}{3} \times \text{重复} \\ C_3^2 (\frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \quad \times \\ C_3^2 (\frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \quad \checkmark = C_3^2 \cdot (\frac{2}{3})^3 \cdot \frac{1}{3} \end{cases}$

注：说第四局甲胜不是指"甲的必胜"或"甲一定胜"

$P(A_5) = C_4^2 (\frac{2}{3})^2 (\frac{1}{3})^2 \cdot \frac{2}{3}$

$P(\text{甲胜}) = P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) = \frac{64}{81}$

Ch2 一维随机变量及分布

r.v.

一、r.v. 及分布函数

(一) r.v.

1. 定义：直观上指取值有随机性的变量.

如：抛一枚骰子观察出现的点数

$X = 1, 2, \cdots, 6$.

数学上指定义在 Ω 上的单值实值函数 $X = X(\omega)$，$\omega \in \Omega$

如 抛一枚硬币，观察正反面情况.

$\Omega = \{\text{正}, \text{反}\} = \{\omega\}$

令 $X = \begin{cases} 0, & \omega = \text{正}, \\ 1, & \omega = \text{反}, \end{cases} = X(\omega)$

函数　　　　自变量

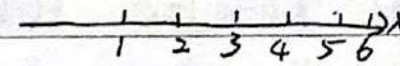
$\Omega = \{(X=0) \cup (X=1)\}$

$\{$出现正面$\} = A = \{X=0\} = \{X \le 0\}$

$= \{X \le \frac{1}{2}\} = \{X < 1\}$

ch1表示成 ch2

(二) 分布函数



$P\{X=1\} = \frac{1}{6}$, $P\{X \le 1\} = \frac{1}{6}$

$P\{X<2\} = P\{X=1\} = \frac{1}{6}$

$P\{X \le 2\} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

1. 定义:

$P\{X \le x\} \triangleq F(x)$

r.v. 具体实数

注1. $X \le x$ 为一事件

注2. $P\{X \le y\} = F(y)$, X 的分布函数自变量也可用 y.

有时为了突出 X 的分布函数，加个下标 $F_X(y) = P\{X \le y\}$

注3. 几何上 $F_X(x) = P\{X \le x\}$ 表示 $X \in (-\infty, x]$ 的概率

2. 性质

(1) $0 \le F(x) \le 1$,

$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

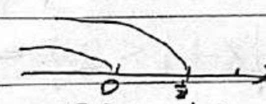
(2) $F(x)$ 单调不减，即 $\forall x_1 < x_2$, 有 $F(x_1) \le F(x_2)$

证: $F(x_1) = P\{X \le x_1\}$, $F(x_2) = P\{X \le x_2\}$

$\because \{X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\}$ $(A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B))$

$\therefore P\{X \le x_1\} \le P\{X \le x_2\}$

即 $F(x_1) \le F(x_2)$



如 $X = 0, 1$, $P\{X \le 0\} = P\{X \le \frac{1}{2}\}$

(3) $F(x)$ 处处右连续 (不证)

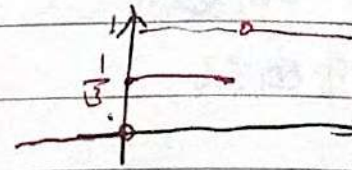
即 $F(x+0) = F(x)$

注. $F(x)$ 成为分布函数 $\Longleftrightarrow$ (1) (2) (3) 同时成立.

例2.1

(A) $F(+\infty)=+\infty$

(B) $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$



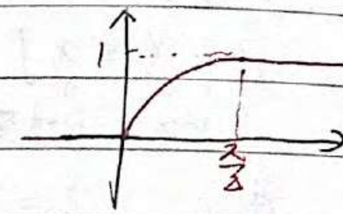
$F(x)$ 单调不减

$F(0+0)=F(0)=\frac{1}{3}$

$F(1+0)=1\neq F(1)=\frac{1}{3}$, $X=1$ 处左连续

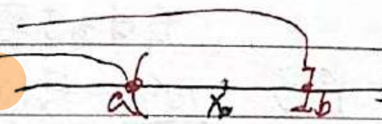
(C) $(0,1)$ 上单调减

(D) $F(x)=\begin{cases}0, & X<0,\\ \sin X, & 0\leq X\leq\frac{\pi}{2},\\ 1, & X>\frac{\pi}{2}\end{cases}$



处处连续

3. 用分布函数求概率



记 (1) $P\{a<X\leq b\}=F(b)-F(a)$

(2) $P\{X=x_0\}=F(x_0)-F(x_0-0)$

$=F(x_0+0)-F(x_0-0)$

注: $F(4)=P\{X\leq 4\}\geq P\{X=4\}$

例2.2 $F(x)=\begin{cases}0, & X\leq 1,\\ a-\frac{b}{X}, & X>1.\end{cases}$

解: $F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}(a-\frac{b}{x})=a=1$

又 $F(1+0)=F(1)\Rightarrow 1-b=0\Rightarrow b=1$

$\therefore F(x)=\begin{cases}0, & X\leq 1\\ 1-\frac{1}{x}, & X>1\end{cases}$

$P\{|X-1|<2\}=P\{-2<X-1<2\}=P\{-1<X<3\}$

$=P\{-1<X\leq 3\}-P\{X=3\}$

$=F(3)-F(-1)-[F(3)-F(3-0)]$

$=F(3-0)-F(-1)$

$=(1-\frac{1}{3})-0=\frac{2}{3}$

二、离散型 r.v.

(一) 离散型

1. 定义：取值为有限个或可列无穷个

2. 分布律：

(1) $P\{X=x_i\}=p_i,\ i=1,2,\cdots$

(2)

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

(3) $X\sim\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$

3. 分布律的性质.

(1) $p_i\geq 0$；　(2) $\sum\limits_i p_i=1$

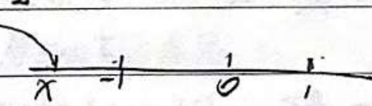
4. 概率的计算

$P\{X\in L\}=\sum\limits_{x_i\in L}P\{X=x_i\}$

例 2.3

解：$\begin{cases} a+b+\frac{1}{6}=1 \\ a+\frac{1}{6}=b \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$

$\therefore X\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$



$F(x)=P\{X\leq x\},\ x\in R$　　注 $P\{X\leq -1\}=P\{X=-1\}$

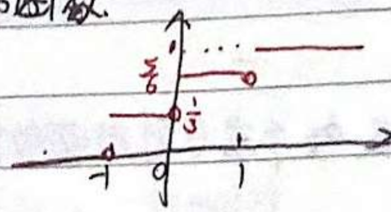
$=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ \frac{1}{3} & -1\leq x<0 \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{2} & 0\leq x<1. \\ 1 & 1\leq x \end{cases}$

注1. $F(x)$ 在 $x=-1,0,1$ 处出现跳跃

$P\{X=x_0\}=F(x_0)-F(x_0-0)$

Date. /

注2. $F(x)$为阶梯函数.



注3 保证处处右连续，每个区间左闭右开

或"得保证右连续，等号给 $\geq$"

(二) 常见离散型 r.v.

1. 0-1分布 $X \sim B(1,p)$.

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

2. 二项分布. $X \sim B(n,p)$.

$$P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,2,\cdots,n$$

注1. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = [p+(1-p)]^n = 1$.

注2. 背景：n次独立重复试验中某事件A发生的次数 $X \sim B(n,p)$.

3. 泊松分布 $\cancel{X\sim P}$ $X \sim P(\lambda)$, $\lambda>0$.

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\cdots$$

注. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\cdots+\frac{\lambda^n}{n!}\cdots\right)$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

例2.5 解. $P\{X=1\} = P\{X=2\}$

$\Rightarrow \frac{\lambda^1}{1!} \cancel{e^{-\lambda}} = \frac{\lambda^2}{2!} \cancel{e^{-\lambda}} \Rightarrow \lambda^2 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 2$

$\therefore X \sim P(2)$

$P\{0<X^2<3\}$ $\quad \because X$取 $0,1,2,\cdots$

$= P\{X=1\} = 2e^{-2}$

4. 几何分布

$$P\{X=k\} = (1-p)^{k-1} p, \quad k=1,2,\cdots$$ ← 等比级数，也叫几何级数

注1. $\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p[1+(1-p)+(1-p)^2+\cdots]$

$$= p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

(M, N) 取 n

注2. 几何分布：第k次射击是首次命中.

5、超几何分布（参见Ch1古典概型讨论）. $P\{\text{恰有}k\text{个次品}\}=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$

三、泊松定理（仅在1992年）

记住：$X\sim B(n,p)$. 当 n 较大，p 较小，np 适中时，则 X 近似 $P(\lambda)$，$\lambda=np$

例2.7 $X\sim B(100,0.05)$，$P\{X\geq 3\}$

解：$P\{X\geq 3\}=1-P\{X<3\}=1-[P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}]$

$=1-[\underbrace{0.95^{100}+100\times 0.05\times 0.95^{99}+C_{100}^2\times 0.05^2\times 0.95^{98}}_{\text{很难算}}]$

$\xrightarrow[X\text{近似}P(5)]{\text{泊松近似}} 1-[\frac{5^0}{0!}e^{-5}+\frac{5}{1!}e^{-5}+\frac{5^2}{2!}e^{-5}]$

$\xlongequal{\text{查表}} 0.87$

四、连续型 r.v.（与积分有关）

（一）一维连续型

1. 定义：若 X 的分布函数

$F(x)=P\{X\leq x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

其中 $f(x)$ 非负可积，则 X 为连续型 r.v.

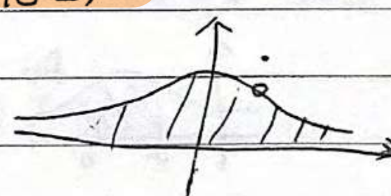
$f(x)$ 为 X 的概率密度.

注：$f(x)$ 可积 $\Rightarrow \int_{-\infty}^{x}f(t)dt$ 连续

故连续型 r.v. 的分布函数 $F(x)$ 处处连续.

2. $f(x)$ 为密度 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0 & (\text{非负性}) \\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1 & (\text{规范性}) \end{cases}$

注：$f(x)$ 不唯一.



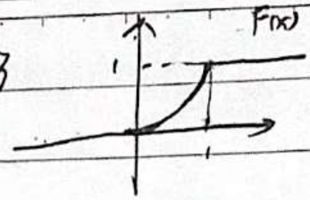
如：$f(x)=\begin{cases} 2x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$g(x)=\begin{cases} 2x, & 0\leq x\leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

均有 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dx=1$

Date. /

例2.8



例2.9. $f(x)$ 为密度 即 $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$

(B) $f(x) \geq 0 \Rightarrow f(2x) \geq 0$

但 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(2x)\,d(2x) = \frac{1}{2}$

(C) $f(1-x)$

$\because \forall x$, 有 $f(x) \geq 0$，$\therefore f(1-x) \geq 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(1-x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(1-x)\,d(1-x) \overset{1-x=t}{=\!=} -\int_{+\infty}^{-\infty} f(t)dt = 1$

(D) $1-f(x)$ 未必非负

3. 求概率.

(1) $P\{X=x_0\} = F(x_0) - F(x_0 - 0) \overset{F(x)连续}{=\!=\!=} 0$

注：概率为0的事件未必是 ϕ

我们认为 X 取 $f(x)>0$ 的那些 x.

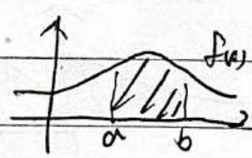
如 $X \sim f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 0 & 其他. \end{cases}$

则 X 只在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 内取值.

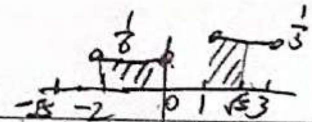
(2) $P\{a < X \leq b\} = P\{a \leq X \leq b\}$

$= P\{a \leq X < b\} = P\{a < X < b\}$

$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ （表示面积）



Date. 1



例 2.11

$$X \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & -2<x<0 \\ \frac{1}{3}, & 1<x<3 \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

$X \in (-2,0) \cup (1,3)$ 取值

求 $P\{X^2 \le 5\} = P\{-\sqrt{5} \le X \le \sqrt{5}\} = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} f(x)dx$ ($f(x)$为分段函数)

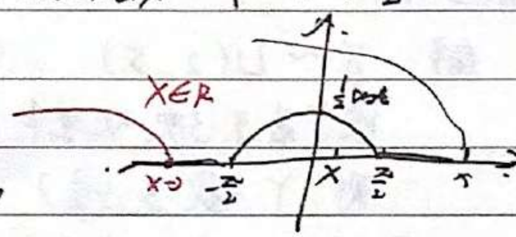
$= \int_{-\sqrt{5}}^{-2} 0dx + \int_{-2}^{0} \frac{1}{6} dx + \int_0^1 0dx + \int_1^{\sqrt{5}} \frac{1}{3} dx$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times (\sqrt{5}-1) = \frac{\sqrt{5}}{3}$

例 2.12 $X \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos x, & |x|<\frac{\pi}{2} \\ 0, & 其他 \end{cases}$

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} K\cos x dx = 1 \Rightarrow K=\frac{1}{2}$

(2) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$



① $x<-\frac{\pi}{2}$, $t \in (-\infty, x]$, $f(t)=0$

$F(x)=0$;

② $-\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2}$, $t \in (-\infty, x] = (-\infty, \frac{\pi}{2}] \cup (\frac{\pi}{2}, x]$

$F(x) = \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} 0dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{1}{2}\cos t\, dt = \frac{1}{2}\sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{x} = \frac{1}{2}(\sin x+1)$

③ $x \ge \frac{\pi}{2}$时 $F(x)=1$.

例 2.13 ☆☆☆

$P(A)=0 \xLeftarrow{\not\Rightarrow} A=\phi$ (∵连续型r.v.取到某一点的概率为0,但还能取到该点)

$P(A)=P(B) \xLeftarrow{\not\Rightarrow} A=B$ (∵连续型A, B可能相差一个点).

(1). $P(AB)=0 \not\Rightarrow$ AB互斥

(2) $P(A)=P(AB) \not\Rightarrow A=AB$ (B比A少一点)

$\Updownarrow$

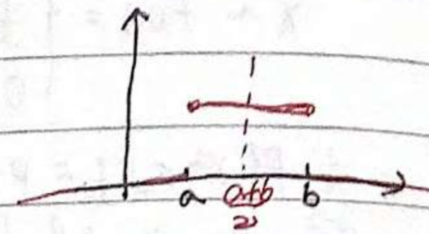
$A \subset B$

Date.　　/

(二) 常见连续型

1. 均匀分布 $X \sim U(a,b)$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & 其他\end{cases}$$



$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x<b\\ 1 & b\le x\end{cases}$$

注：若 $(c,d)\subset(a,b)$，则 $P\{c<X<d\}=\frac{d-c}{b-a}$ （长度之比）

例 2.14

解. $X\sim U(2,5)$ ，$P\{X>3\}=\{5>X>3\}=\frac{5-3}{5-2}=\frac{2}{3}$

设Y表示3次观察中 $X>3$ 的次数.

则 $Y\sim B(3,\frac{2}{3})$ 　Y取0, 1, 2, 3.

$$P\{Y\geq 2\}=P\{Y=2\}+P\{Y=3\}$$
$$=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}+C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0$$
$$=\frac{20}{27}$$

2. 指数分布 $X\sim E(\lambda)$，$\lambda>0$

(1) $X\sim f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 　{"=" 给 $x\geq 0$ 或 $x\le 0$ 均可}

浙大书 $X\sim f(x)=\cancel{\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}}$ 　以大纲为准

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$

$$=\begin{cases}0 & x<0\\ \int_0^x\lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\end{cases}$$

注：$F(x)<1$ ，但 $F(+\infty)=1$

(3) 背景：寿命

(4) $P\{X>a\}=\begin{cases}\int_a^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx,\\ 1-F(a)\end{cases}$ 　$a>0$

$$=e^{-\lambda a}$$

(5) 有"无记忆性" $s>0,\ t>0$.

$$P\{X>s+t \mid X>s\} = P\{X>t\}$$

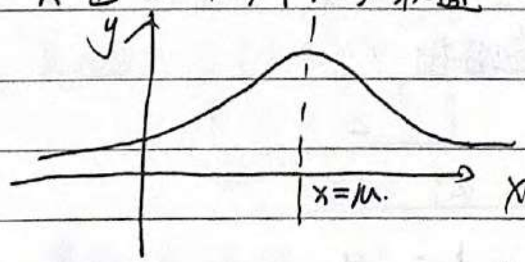
证：左 $= \dfrac{P\{X>s, X>s+t\}}{P\{X>s\}} = \dfrac{P\{X>s+t\}}{P\{X>s\}} = \dfrac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}$

$= P\{X>t\}$

3. 正态分布（每年必考） $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

(1) $X \sim f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma>0$. $X \in R$

注：X 在 $(-\infty, +\infty)$ 取值



$P\{X<\mu\} = P\{X \geq \mu\}$
$= \frac{1}{2}$

(2) $X \sim F(x) = \int_{-\infty}^{x} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$

积不出来！但 $F(x) \uparrow$

$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$

(3) $X \sim N(0,1)$

~~$X=$~~ $X \sim \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in R$ 偶函数

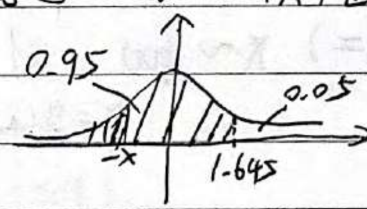
$X \sim \Phi(x) = P\{X<x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. 积不出，

但可查表. $\Phi(0) = 0.5$

$\Phi(1) = 0.8413$

$\Phi(1.645) = 0.95$

$\Phi(1.96) = 0.975$



$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$P\{|X| \leq a\} = P\{-a \leq X \leq a\}$

$= \Phi(a) - \Phi(-a) = 2\Phi(a) - 1$

(4) 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

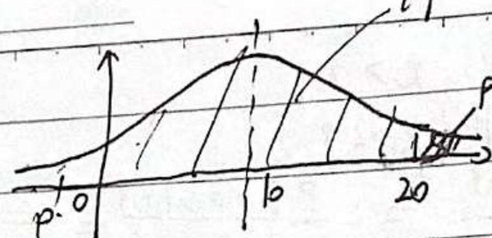
$$\boxed{P\{a<X<b\} = P\left\{\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}$$

必考

先标准化再查表

Date. /

例 2.16



五. 已知 X 的分布，求 $Y=g(X)$ 的分布

(一) $P\{X=x_i\}=p_i,\ i=1,2,\cdots$

则 $P\{Y=g(x_i)\}=p_i,\ i=1,2,\cdots$

若 $g(x_i)$ 有相同值，应合并

例 2.18

X	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.3	0.4
X^2	1	0	1	4
$\max\{X,1\}$	1	1	1	2

$\therefore X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$

$\max\{X,1\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$

(二) $X \sim f(x)$，则

$Y=g(X)$ 可能为 $\begin{cases} \text{离散型（求分布律）} \\ \text{连续型（先求 } F_Y(y) \text{ 再求导）} \\ \text{混合型（不作讲）} \end{cases}$

补例. $X \sim U(2,5)$，令

$Y=\begin{cases} 1, & X \le 3, \\ 2, & X > 3, \end{cases}$

则 $Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

分布函数法.

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$

解出X $P\{\varphi(y)\le X\le \psi(y)\}$

$=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f_X(x)\,dx$

再对y求导.

$f_Y(y)=f_X(\psi(y))\psi'(y)-f_X(\varphi(y))\cdot\varphi'(y)$

例2.19 $X\sim F_X(x)=P\{X\le x\}$

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+1\le y\}$

$=P\{X\le \frac{y-1}{2}\}$

$=F_X(\frac{y-1}{2})$，选(A)

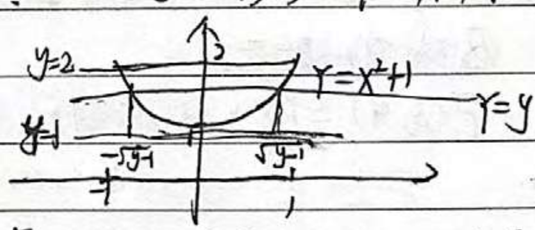
例2.20 自学并记住

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Y=aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$

例2.21 $X\sim f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2, & -1<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$Y=X^2+1$. 求 $f_Y(y)$

分析: $X\in(-1,1)$, $Y=X^2+1\in(1,2)$



解: $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2+1\le y\}$

$y<1$, $F_Y(y)=0$, $y\ge 2$, $F_Y(y)=1$;

$1\le y<2$,

关键

$F_Y(y)=P\{X^2\le y-1\}=P\{-\sqrt{y-1}\le X\le\sqrt{y-1}\}$

$=\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f(x)\,dx$ $\because(-\sqrt{y-1},\sqrt{y-1})\subset(-1,1)$

$=\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}}\frac{3}{2}x^2\,dx$

$=\int_0^{\sqrt{y-1}}3x^2\,dx$

$=x^3\Big|_0^{\sqrt{y-1}}=(y-1)^{\frac{3}{2}}$

Date. /

$$\therefore F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ (y-1)^{\frac{3}{2}}, & 1\le y<2\\ 1, & 2\le y\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}(y-1)^{\frac{1}{2}}, & 1<y<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

注. $\frac{d}{dy}\int_0^{\sqrt{y-1}} 3x^2\,dx = 3(\sqrt{y-1})^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{y-1}}=\frac{3}{2}\sqrt{y-1}$

3 ch3 二维 r.v. 及分布

一、二维 r.v. 及分布函数

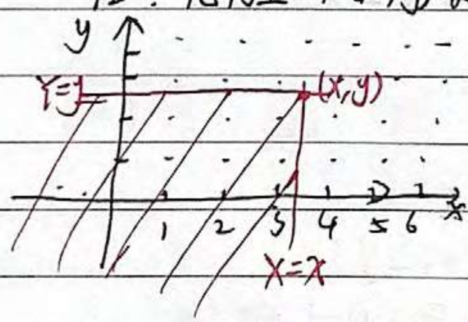
(一) 二维 r.v.

设 $X=X(\omega)$, $Y=Y(\omega)$ 为定义同一 Ω 上的两个 r.v. 称 (X,Y) 为二维 r.v.

(二) (X,Y) 的联合分布函数

1. 定义: 称 $F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$, $x\in R$, $y\in R$ 为 (X,Y) 的联合分布函数

注: 几何上 $F(x,y)$ 表示 (X,Y) 落在点 (x,y) 的左下方区域的概率.



$F(3,4)=P\{X\le 3, Y\le 4\}$

2. 性质.

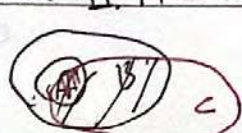
(1). $0\le F(x,y)\le 1$. $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0$

$F(+\infty,+\infty)=1$

(2) $F(x,y)$ 表示每个变量单调不减,

$\forall x_1<x_2$, $y_1<y_2$, 有 $F(x_1,y_1)\le F(x_2,y_1)\le F(x_2,y_2)$

忆: 若 $A\subset B \Rightarrow P(A)\le P(B) \Longrightarrow P(AC)\le P(BC)$



~~$F(x_2, y_2)$~~

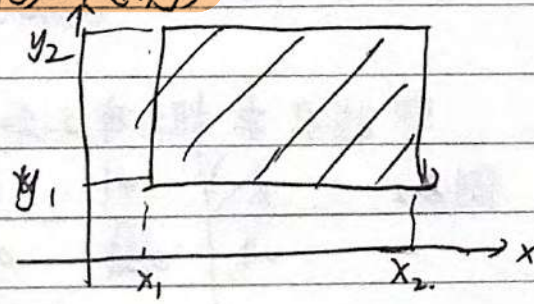
(3) $F(x,y)$关于x和y均右连续.

即 $F(x+0,y)=F(x,y)$, $F(x,y+0)=F(x,y)$

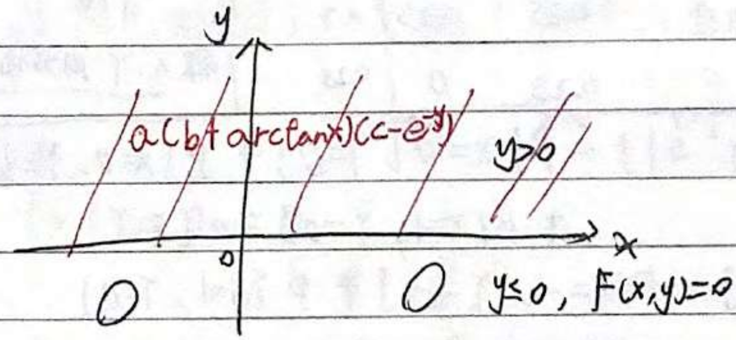
(4) $P\{x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2\}$

$=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)$

$-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\ge 0$



例3.1



解: $\forall y>0$, $F(-\infty,y)=a(b-\frac{\pi}{2})(c-e^{-y})=0$ … ①

$F(+\infty,+\infty)=a(b+\frac{\pi}{2})c=1$ … ②

$\forall x$, $F(x,0+0)=F(x,0)$

$a(b+\arctan x)(c-1)=0$ — ③

联立①②③得:

$a=\frac{1}{\pi^2}$, $b=\frac{\pi}{2}$, $c=1$

二、二维~~离散型~~ r.v.

(一) 二维离散型 r.v.

1.定义:取值为有限多对点或可列无穷多对.

2.分布律(联合)

(1) $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}$, $i,j=1,2,\cdots$

(2)

(X,Y)	(x_1,y_1),	(x_2,y_2),	— —	(x_n,y_n)
	p_1	p_2	— —	p_n

(3)

X \ Y	y_1	y_2 ⋯	y_j ⋯	
x_1	p_{11}	p_{12} ⋯	p_{1j} ⋯	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22} ⋯	p_{2j} ⋯	$p_{2\cdot}$
⋮	⋮			⋮
→ x_i	p_{i1},⋯	p_{i2} ⋯	p_{ij} ⋯	$p_{i\cdot}$ ←

Date.　　/

注：$p_{ij} \geq 0$ 且 $\sum_j \sum_i p_{ij} = 1$

3. 求概率

$$P\{(X,Y)\in D\} = \sum_{(x_i,y_j)\in D} P\{X=x_i, Y=y_j\}$$

即找点求概率之和

例 3.2

$X \backslash Y$	-1	0	1	
-1	0.25	0	0	0.25
0	0	0.25	0.25	0.5
1	0	0.25	0	0.25
	0.25	0.5	0.25	

注：例3.2中

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$$

称 X, Y 同分布，并不能说 X=Y

$\because P\{X=Y\}=0.5 \neq 1$

$$P\{X^2+Y^2 \leq 1\} = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=0, Y=1\} + P\{X=1, Y=0\} = 0.75$$

$$P\{|X|=1\} = P\{X=-1, Y=-1\} + P\{X=1, Y=0\} = 0.5$$

4. 边缘分布律

$$P\{X=x_i\} = P\{X=x_i, Y<+\infty\} = p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{ij} + \cdots = p_{i\cdot}$$

$$P\{Y=y_j\} = P\{X<+\infty, Y=y_j\} = p_{1j} + p_{2j} + \cdots + p_{ij} + \cdots \triangleq p_{\cdot j}, \quad j=1,2,\cdots$$

注意：联合分布律 $\underset{\not\leftarrow}{\xrightarrow{\text{可推}}}$ 边缘分布律

例3.3

$X \backslash Y$	0	1	
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

$P\{XY \neq 1\} = \frac{3}{8} \Rightarrow P\{XY=1\} = \frac{5}{8} \Rightarrow P\{X=1, Y=1\} = \frac{5}{8}$

$P\{X+Y \leq 1\} = 1 - P\{X+Y>1\} = 1 - P\{X=1, Y=1\} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

5. 条件分布律　忆 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$，$P(A)>0$

若 $P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}>0$，称

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

x_i 遍历，y_j 的 j 固定

$i=1,2,\cdots$

或 $(X|Y=y_j)\sim\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots \\ \frac{p_{1j}}{p_{\cdot j}} & \frac{p_{2j}}{p_{\cdot j}} & \cdots & \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} & \cdots \end{pmatrix}$

为 $Y=y_j$ 的条件下，X 的（条件）分布律

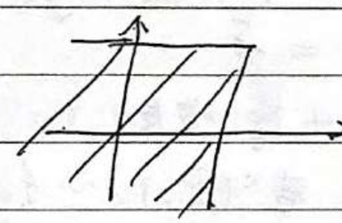
例3.3中

$$(X|Y=1)\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

(二) 二维连续型 r.v.（与二重积分有关）

1.定义：若

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$



其中 $f(x,y)$ 非负可积

称 (X,Y) 为二维连续型 r.v.

$f(x,y)$ 为联合密度.

注：$F(x,y)$ 必处处连续，且 $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}=f(x,y)$

2. $f(x,y)$ 为密度 $\Longleftrightarrow \begin{cases} f(x,y)\ge 0 & \text{(非负性)} \\ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1}_{\text{体积为1}} & \text{(规范性)} \end{cases}$

注：$f(x,y)$ 不唯一.

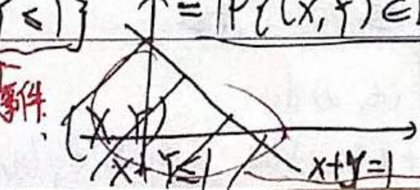
3. 求概率

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{(体积)}$$

如：$\underbrace{P\{X+Y\le 1\}}_{\text{事件}} = P\{(X,Y)\in D=\{(x,y) \mid x+y\le 1\}\}$

$$=\iint_{\underbrace{x+y\le 1}_{\text{区域}}} f(x,y)\,dx\,dy$$

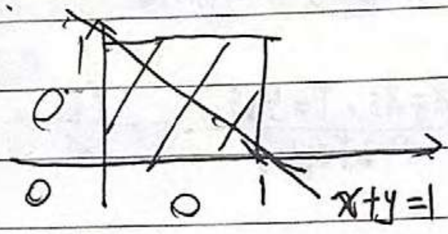
帮理解



Date. /

例3.5自学.

例3.6.

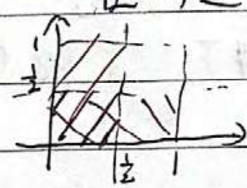


(1) $P\{X+Y\le 1\}$

$= \iint_{x+y\le 1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)\,dy \overset{或}{=} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (x+y)\,dx$

$= \frac{1}{3}$ 注：不是 $\frac{1}{2}$

(2). $P\{\max(X,Y)\le \frac{1}{2}\}$



$= P\{X\le \frac{1}{2}, Y\le\frac{1}{2}\}$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\frac{1}{2}} (x+y)\,dy$

$= \frac{1}{8}$ ↙ X, Y至少有一个 $\le \frac{1}{2}$ $X\le\frac{1}{2}$ 或 $Y\le\frac{1}{2}$

(3) $P\{\min(X,Y)\le\frac{1}{2}\}$

$= 1 - P\{\min(X,Y) > \frac{1}{2}\}$

$= 1 - P\{X>\frac{1}{2}, Y>\frac{1}{2}\}$

$= 1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{\frac{1}{2}}^1 (x+y)\,dy$

$= \frac{5}{8}$

4. 边缘密度

若 $(X,Y)\sim f(x,y)$ 则

$X \sim f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

$Y \sim f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

证：回忆：$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$

$F_X(x) = P\{X\le x\} = P\{X\le x, Y<+\infty\}$

$= F(x,+\infty)$

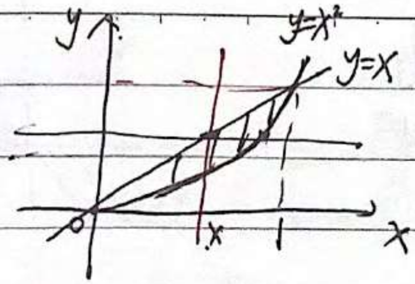
$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,du\,dv$

$= \int_{-\infty}^{x} [\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,dv]\,du$

$\therefore f_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,v)\,dv$

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$ 同理 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

例 3.7



$$S=\int_0^1 (x-x^2)\,dx = \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$ 讨论 x

当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$，$f(x,y)=0$，$f_X(x)=0$

$0<x<1$ 时，

$$f_X(x)=\cancel{\int_{-\infty}^{x^2} 0\,dy} + \int_{x^2}^{x} 6\,dy + \cancel{\int_{x}^{+\infty} 0\,dy}.$$
$$= 6(x-x^2)$$

$$\therefore f_X(x)=\begin{cases} 6(x-x^2) & 0<x<1 \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 讨论 y

$$=\begin{cases} \int_y^{\sqrt{y}} 6\,dx & 0<y<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 6(\sqrt{y}-y) & 0<y<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

5. 条件密度（背公式即可）　忆：$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$　$p_{\cdot j}>0$

$Y=y$ ($f_Y(y)>0$) 的条件下，称

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

为 X 的条件密度

同理 $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 为 $X=x$ 的条件下 Y 的条件密度.

($\because f_X(x)>0$)

注：$f_{Y|X}(y|x)\ge 0$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\,dy=\frac{f_X(x)}{f_X(x)}=1$

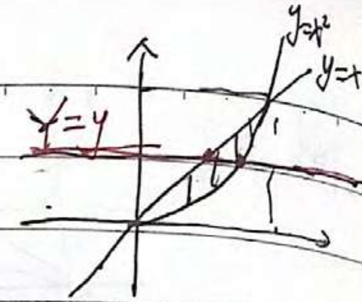
它表示限定 $X=x$ 这一条件时，

Y 的概率密度.

Date. /

例 3.9 已求得 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

$$=\begin{cases}\int_{x^2}^{x} 6\,dy = 6(x-x^2) & 0<x<1 \\ 0 & 其他\end{cases}$$



$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

$$=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}} 6\,dx = 6(\sqrt{y}-y), & 0<y<1 \\ 0, & 其他\end{cases}$$

(1) $Y=y$ $(0<y<1)$ 时

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{y}-y}, & y<x<\sqrt{y} \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

注：$Y=y\,(0<y<1)$ 的条件下

$X \sim U(y,\sqrt{y})$

(2) $f_{X|Y}(x|\frac{1}{4})=\begin{cases}4, & \frac{1}{4}<x<\frac{1}{2} \\ 0, & 其他\end{cases}$

(3) $P\{0\le X\le \frac{1}{3} \mid Y=\frac{1}{4}\}$

法一：$\dfrac{P\{0\le X\le\frac{1}{3}, Y=\frac{1}{4}\}}{P\{Y=\frac{1}{4}\}}$ ← 分母为0，无意义　不可！

法二：限定 $Y=\frac{1}{4}$ 这一条件时，$0\le X\le\frac{1}{3}$ 的概率

$P\{0\le X\le\frac{1}{3} \mid Y=\frac{1}{4}\}$

$=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} 4\,dx$　(ch2)

$=\frac{1}{3}$

三. r.v. X, Y 独立与不相关.

ch4 讲

1. 定义：忆：事件 A, B 独立 $\Longleftrightarrow$ $P(AB)=P(A)P(B)$

若 $\forall\, x, y$，有

$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，即

$P\{\underbrace{X\le x}_{A}, \underbrace{Y\le y}_{B}\} = P\{\underbrace{X\le x}_{A}\}P\{\underbrace{Y\le y}_{B}\}$

Date. /

2.判定

(1) 离：$\forall i,j$，$p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$ 则独立.

(2) 连：$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 则独立.

(3) $\exists x_0, y_0$, s.t.

$P\{X\le x_0, Y\le y_0\}\ne P\{X\le x_0\}P\{Y\le y_0\}$

则 X, Y 不独立.

(4) P40 注. 若 $\boxed{\ }$. 边平行于坐标轴

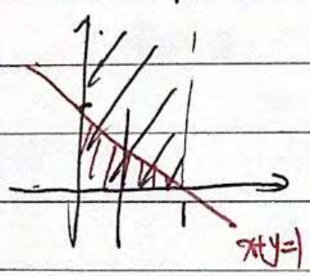
$f(x,y)$ 可分离变量且正域为正矩形.

则独立.

例3.10. X, Y 独立, $X\sim U(0,1)$, $Y\sim E(1)$.

则 $P\{X+Y<1\}=$ ______

解：$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$



$$=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<1, y>0 \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

$P\{X+Y<1\}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}e^{-y}dy=e^{-1}$

3. 两个结论

(1) X, Y 独立, 则

$P\{a<X<b, c<Y<d\}=P\{a<X<b\}P\{c<Y<d\}$

(2) X, Y 独立 $\Rightarrow$ $g(X)$ 与 $h(Y)$ 独立.

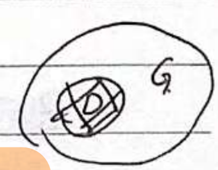
如：X^2 与 Y^2，X^2 与 Y 均独立.

四：两个二维连续型

(一) 二维均匀分布

若 $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_G}, & (x,y)\in G, \\ 0, & 其他.\end{cases}$

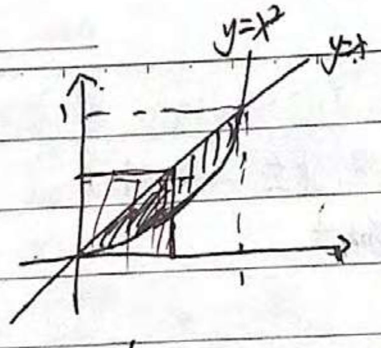
则称 (X, Y) 为 G 上的均匀分布.



注：若 $D\in G$，则 $P\{(x,y)\in D\}=\frac{S_D}{S_G}$（面积之比）

Date. /

例3.12.



(1) $S = \int_0^1 (x-x^2)\,dx = \frac{1}{6}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 6, & 0<x<1,\ x^2<y<x, \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

(2) $P\{0<X<\frac{1}{2},\ 0<Y<\frac{1}{2}\}$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{x^2}^{x} 6\,dy$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} (6x-6x^2)\,dx$

$= 3x^2-2x^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

注：不可 $\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{2}$ ×

(二) 二维正态分布

$(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$

强化再细研究

五. 由(X,Y)的分布求$Z=g(X,Y)$的分布.

(一) $P\{X=x_i, Y=y_j\} = p_{ij}$, $i,j=1,2,\cdots$

则 $P\{Z=g(x_i,y_j)\} = p_{ij}$, $i,j=1,2,\cdots$

若 $g(x_i,y_j)$ 有相同值，应合并.

例3.13.

X\Y	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

忆：独立 $\Leftrightarrow \forall i,j.$ $p_{ij} = p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$

解：

$Z = \min\{X,Y\} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$Z = X+Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

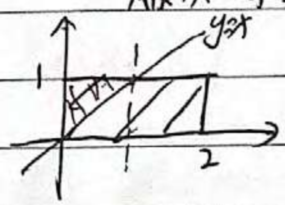
(二) $(X,Y)\sim f(x,y)$ 注：(X,Y) 为二维 r.v.

$Z=g(X,Y)$ 为二元函数

Z 为一维 r.v.

$Z=g(X,Y)$ 可能为 $\begin{cases}\text{离散型（求分布律）}\\ \text{连续型（先求 } F_Z(z) \text{ 再 } f_Z(z)\text{）}\\ \text{混合型（强化讲）}\end{cases}$

补例：设 (X,Y) 在 $G: 0\le x\le 2, 0\le y\le 1$ 上服从均匀分布。令 $Z=\begin{cases}0, & Y\ge X,\\ 1, & Y<X,\end{cases}$



则 $Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$

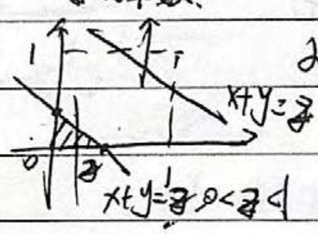
1. 分布函数法.

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\underbrace{g(X,Y)\le z}_{\text{事件}}\}$

$=\iint\limits_{\underbrace{g(x,y)\le z}_{\text{区域}}} f(x,y)\,dx\,dy$

z 为常数.

例3.14



$a=0, b=2$

(1) $Z=X+Y$

解，$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}$，$z\in R$

① $z<0$，$F_Z(z)=0$；

② $z\ge 2$，$F_Z(z)=1$

③ $0\le z<2$ 时，

$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}$

$=\begin{cases}\int_0^z dx\int_0^{z-x} 1\,dy & 0\le z<1\\ 1-\int_{z-1}^1 dx\int_{z-x}^1 1\,dy & 1\le z<2\end{cases}=\begin{cases}\frac{z^2}{2}, & 0\le z<1\\ 1-\frac{(2-z)^2}{2}, & 1\le z<2\end{cases}$

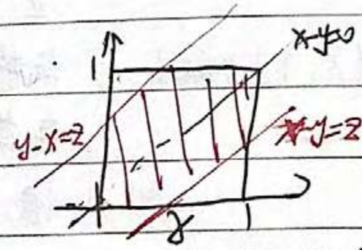
$\therefore F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{z^2}{2}, & 0\le z<1\\ 1-\frac{(2-z)^2}{2}, & 1\le z<2\\ 1, & 2\le z.\end{cases}$

Date. /

$$f_Z(z)=\begin{cases} z, & 0<z<1, \\ 2-z, & 1\le z<2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

(2) $U=|X-Y|$.

$\alpha=0,\quad \beta=1$



$$\iint_{|x-y|\le z} f(x,y)\,dxdy$$

$$|x-y|=z \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=z & x>y \\ y-x=z & y>x \end{cases}$$

$$F_U(z)=P\{U\le z\}$$
$$=P\{|X-Y|\le z\}$$
$$=\begin{cases} 0, & z<0, \\ \dfrac{1-(1-z)^2}{1} & 0\le z<1, \\ 1 & z\ge 1, \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_U(z)=\begin{cases} 2(1-z) & 0<z<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

2. 记住几个公式

(1) $U=\max\{X,Y\}$ 的分布函数.

$$F_U(z)=P\{U\le z\}=P\{\max(X,Y)\le z\}$$
$$=P\{X\le z, Y\le z\}$$
$$\xlongequal{X,Y\text{独立}} P\{X\le z\}P\{Y\le z\}$$
$$=F_X(z)F_Y(z)$$

一样

$$\xlongequal{X,Y\text{同分布}} F_X^2(z)$$

(2) $V=\min\{X,Y\}$ 的分布函数 　　$X\le z$ 或 $Y\le z$

$$F_V(z)=P\{V\le z\}=P\{\min(X,Y)\le z\}$$
$$=1-P\{\min(X,Y)>z\}$$
$$=1-P\{X>z, Y>z\}$$
$$\xlongequal{X,Y\text{独立}} 1-P\{X>z\}P\{Y>z\}$$
$$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$
$$\xlongequal{X,Y\text{同分布}} 1-[1-F_X(z)]^2$$

例3.15.

解：$X \sim E(1)$，$Y \sim E(2)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ 1-e^{-2y} & y \geq 0 \end{cases}$$

$Z=\min\{X,Y\}$（X,Y 独立）的分布函数

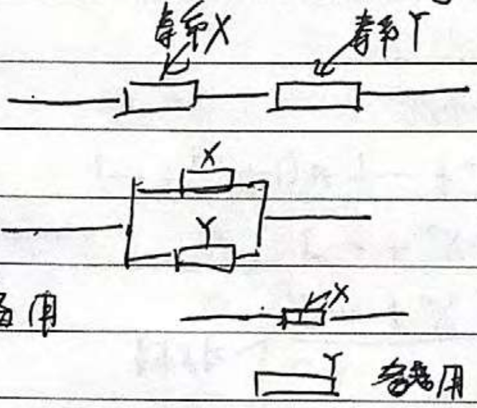
$$F_Z(z) = 1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$
$$= \begin{cases} 0, & z<0 \\ 1-e^{-3z}, & z \geq 0 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z<0 \\ 3e^{-3z}, & z \geq 0 \end{cases}$$

注：~~则~~ $Z=\min\{X,Y\} \sim E(3)$

一般地，$X \sim E(\lambda_1)$，$Y \sim E(\lambda_2)$，X,Y 独立，

则 $Z=\min\{X,Y\} \sim E(\lambda_1+\lambda_2)$.



串联　电路寿命为 $\min\{X,Y\}$

并联　…… $\max\{X,Y\}$

备用　…… $X+Y$.

(3) 独立正态的线性组合仍正态.

推导见例3.16，卷积公式（P45）若需用

先学习例3.16，再看P45最下面的证明

强化再讲~~卷积~~的应用

若 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$　$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且

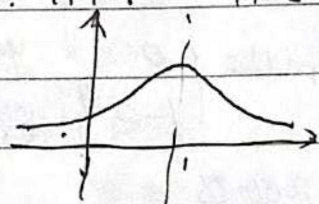
X, Y 独立，则

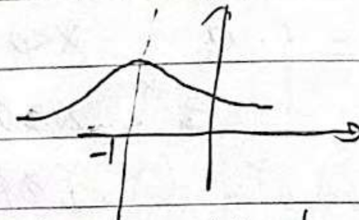
$$aX+bY+c \sim N(a\mu_1+b\mu_2+c,\ a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$$

统计中常用！

例3.17 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim N(1,1)$，X,Y 独立.

解：$X+Y \sim N(1,2)$，$X-Y \sim (-1,2)$





$P\{X+Y \le 1\} = \frac{1}{2}$　　$P\{X-Y \le -1\} = \frac{1}{2}$

4

ch4 数字特征（记公式）

一、期望（也叫均值）

（一）定义：

$$EX \text{ 或 } E(X) = \begin{cases} \sum_i x_i P\{X=x_i\} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \end{cases} \text{ 必须绝对收敛.}$$

例4-2 求几何分布的期望

解：$P\{X=k\} = (1-p)^{k-1} \cdot p$，$k=1,2,\cdots$

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$$

$$= p[1+2(1-p)+3(1-p)^2+\cdots+n(1-p)^{n-1}+\cdots]$$

和 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$

$$\overset{1-p=x}{=\!=} p[1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots]$$

$$= p\underbrace{[x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots]}_{\text{等比级数}}{}' \quad \text{对}X\text{求导}$$

$$= p \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)'$$

$$= p \cdot \frac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2} = p \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

例4.3 $X \sim E(\lambda)$，求 EX.

解：$X \sim f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} (\lambda x) e^{-\lambda x}\, d(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} \times 1! = \frac{1}{\lambda}$$

注：Γ函数

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n! \quad n \in N$$

例44 一定要推一遍

(二) $Y=g(X)$ 的期望

$$Eg(X)=\begin{cases}\sum_i g(x_i)P\{X=x_i\} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx\end{cases}$$ 用X的分布求 $Eg(X)$

注：$$EX^2=\begin{cases}\sum x_i^2 P\{X=x_i\} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx\end{cases}$$

也可求出 X^2 的分布，用定义求

(三) $Z=g(X,Y)$ 的期望

$$EZ=Eg(X,Y)=\begin{cases}\sum_j\sum_i g(x_i,y_j)P\{X=x_i,Y=y_j\} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\,dx\,dy\end{cases}$$

注：$$EXY=\begin{cases}\sum_j\sum_i x_i y_j P\{X=x_i,Y=y_j\} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\,f(x,y)\,dx\,dy\end{cases}$$

也可求出 $Z=XY$ 的分布，用定义求 EZ.

例4.6.

X\Y	0	1	
0	0.2	0.1	0.3
1	0.4	0.3	0.7
	0.6	0.4	

求 EX, EXY

解法一：$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$, $EX=0\times0.3+1\times0.7=0.7$

$XY\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.7 & 0.3\end{pmatrix}$ $EXY=0\times0.7+1\times0.3=0.3$

$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.6 & 0.4\end{pmatrix}$, $EY=0.4$

注：$EXY\neq EX\cdot EY$

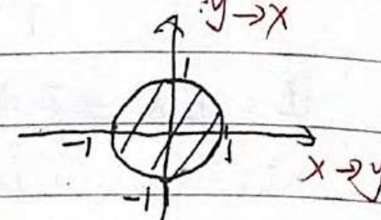
法二: $EX = \sum_j\sum_i x_i P\{X=x_i, Y=y_j\}$

$= 0\times0.2 + 0\times0.1 + 1\times0.4 + 1\times0.3 = 0.7$

$EXY = \sum_j\sum_i x_i y_j P\{X=x_i, Y=y_j\}$

$= 0\times0\times0.2 + 0\times1\times0.1 + 1\times0\times0.4 + 1\times1\times0.3 = 0.3$

例4.8



解:

$EY^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x,y)\,dxdy$

$= \iint_{x^2+y^2<1} y^2\cdot\frac{1}{\pi}\,dxdy$

法一: $EY^2 = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2 \frac{1}{\pi}\,dy$

法二: $EY^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2\sin^2\theta\cdot\frac{1}{\pi}\, r\,dr$

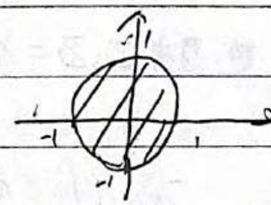
法三: $EY^2 = \iint_{x^2+y^2<1} y^2\cdot\frac{1}{\pi}\,dxdy = \iint_{y^2+x^2} x^2\cdot\frac{1}{\pi}\,dydx$

$= \frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2<1}(x^2+y^2)\frac{1}{\pi}\,dxdy$

$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 r^2\cdot\frac{1}{\pi}\,r\,dr$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 r^3\,dr = \frac{1}{4}$

$EXY = \iint_{x^2+y^2<1} xy\cdot\frac{1}{\pi}\,dxdy$



$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} x\,dx \underbrace{\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy}_{\text{奇函数 区 对称}}$

$= 0$

注: 若D关于某轴(如x)对称, $f(x,y)$为关于另一变量(如y)的奇函数,

则 $\iint_D f(x,y)\,dxdy = 0$

本题 $EX = \iint_{x^2+y^2<1} x\cdot\frac{1}{\pi}\,dxdy = 0.$

$EY = \iint_{x^2+y^2<1} y\cdot\frac{1}{\pi}\,dxdy = 0$

$EXY = 0 = EX\cdot EY$

但X, Y并不独立, 即X, Y独立 $\overset{\times}{\Longleftarrow}$ $EXY=EX\cdot EY$

(三) 期望的性质

1. $E(C)=C$;

2. $E(aX+b) = aEX+b$

Date. /

3. $E(X+Y)=EX+EY$

4. X,Y独立 $\Rightarrow EXY=EX\cdot EY$

5. 若 $X\geq a \Rightarrow EX\geq a$

二、方差

(一). 定义

方差 $DX=E(X-EX)^2\geq 0$

标准差: $\sqrt{DX}$

(二) 计算

$DX=EX^2-(EX)^2$

变形: ~~EX^2~~ $EX^2=DX+(EX)^2$

(三) 性质

1. $D(C)=0$

$D(X)=0 \Longleftrightarrow P\{X=EX\}=1$

2. $D(aX+b)=a^2DX$

3. X,Y独立, 则

$D(X\pm Y)=DX+DY$

4. $D(aX+bY)=D(aX)+D(bY)+2cov(aX,bY)$

5. $E(X-t)^2\geq E(X-EX)^2=DX$

三. 常见分布的期望方差 P_{58}.

推论再记住 (指E(λ), N(μ,σ^2), P(λ), 几何分布)

1. 0－1 分布

$X\sim B(1,p)\quad E(X)=p, D(X)=p(1-p)$;

2. 二项分布

$X\sim B(n,p)\quad E(X)=np, D(X)=np(1-p)$;

3. 泊松分布

$X\sim P(\lambda)\quad E(X)=D(X)=\lambda$;

4. 均匀分布

$X\sim U(a,b)\quad E(X)=\frac{a+b}{2}, D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$;

5. 指数分布

$X\sim E(\lambda)\quad E(X)=\frac{1}{\lambda}, D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$;

6. 正态分布

$X\sim N(\mu,\sigma^2)\quad E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$;

7. 几何分布

$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,\cdots\quad E(X)=\frac{1}{p}, D(X)=\frac{1-p}{p^2}$.

四. 协方差

(一) 定义. $cov(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]$

(二) 计算: $cov(X,Y)=EXY-EX\cdot EY$

(三) 性质(最丰富)

1. $cov(X,X)=DX$;

2. $cov(X,Y)=cov(Y,X)$

deli得力

Date. /

3. $cov(X, c)=0$

4. $cov(aX, bY) = ab\, cov(X, Y)$

5. $cov(X_1+X_2, Y) = cov(X_1, Y) + cov(X_2, Y)$

6. $D(X\pm Y) = DX + DY \pm 2cov(X, Y)$

X, Y 独立，$cov(X, Y)=0$

五．相关系数．

(一) 定义：$\rho_{XY} = \dfrac{cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

反映 X 与 Y 的线性关系的紧密程度

(二) 性质．

1. $|\rho_{XY}| \le 1$

2. $\rho_{XY} = 0$ 称 X, Y 不相关（无线性关系）

X, Y 不相关 $\Leftrightarrow \rho_{XY} = 0$

$\Leftrightarrow cov(X, Y) = 0$

$\Leftrightarrow D(X\pm Y) = DX + DY$

$\Leftrightarrow \underbrace{EXY = EXEY}$ 最为便

X, Y 独立 $\rightleftarrows$ X, Y 不相关

3. $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow P\{\underbrace{Y = aX + b}_{\text{线性关系}}, a \ne 0\} = 1$

$a>0$, $\rho_{XY} = 1$，$a<0$, $\rho_{XY} = -1$

例4.1) 解 $X + Y = n$ (关键)

$\Rightarrow Y = -X + n$

$\Rightarrow \rho_{XY} = -1$

注：$2X + Y = 10 \Rightarrow Y = -2X + 10$

$\Rightarrow \rho_{XY} = -1$

例4.10

X \ Y	0	1	2	
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

(1) $EXY = \sum_j \sum_i x_i y_j P_{ij} = 1\times1\times\frac{1}{3} + 2\times2\times\frac{1}{12} + 0$

$= \frac{2}{3}$

$EX = 0\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{3} + 2\times\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$EY = 0\times\frac{1}{3} + 1\times\frac{1}{3} + 2\times\frac{1}{3} = 1$

$EXY = EX\cdot EY$ ✓ ∴ X, Y不相关.

(2) 不已: X, Y独立 $\Leftrightarrow \forall i,j$, $P_{ij} = P_{i\cdot}\cdot P_{\cdot j}$

$\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$, 不独立

(3). $cov(X-Y, Y) = cov(X, Y) - cov(Y, Y)$

$= 0 - DY$

$= -[EY^2 - (EY)^2]$

$= -[\frac{5}{3} - 1^2] = -\frac{2}{3}$

六、矩

EX: X的一阶原点矩.

EX^2: X的二阶原点矩.

$E(X-EX)^2$: X的二阶中心矩 = DX

$E(\underset{\text{常数}}{X-EX}) = 0$

七、X的标准化

称 $X^* = \frac{X-EX}{\sqrt{DX}}$ 为X的标准化

注: $EX^* = E\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\right) = 0$

$DX^* = D\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\right) = \frac{D(X-EX)}{DX} = \frac{DX}{DX} = 1$.

但不能说 $X^* \sim N(0,1)$

Date. / 5

ch5 统计的概念

一、总体 样本. 样本矩

(一) 总体

总体是所研究对象的某一数量指标的全体.

常说总体 X, 且有它的分布

(二) 样本

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的容量为 n 的简单随机样本.

指.

(1) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立;

(2) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 与总体 X 同分布.

注: $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 随 r.v. 理论研究, 抽样之前. $\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 具体数值 具体抽样, 抽样之后. $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$

例 5-1 X_1, X_2, X_3, X_4 或 (X_1, X_2, X_3, X_4) 均可

总体 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

解: $P\{\min\limits_{1\le i\le 4} X_i \le 1\} = 1 - P\{\min\limits_{1\le i\le 4} X_i > 1\}$

$= 1 - P\{X_1>1, X_2>1, X_3>1, X_4>1\}$

$\overset{独立}{=} 1 - \prod\limits_{i=1}^{4} P\{X_i>1\}$

$\overset{同分布}{=} 1 - \prod\limits_{i=1}^{4} P\{X_i=2\}$

$= 1 - (\frac{1}{3})^4 = \frac{80}{81}$

(二) 统计量

1. 定义: 样本的不含任何未知参数的函数.

$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为统计量

2. 常用的统计量

(1) 样本均值. $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$;

(2) 样本方差. $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

大纲规定

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2)$$

$$=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+n\overline{X}^2]$$

$$=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n\overline{X}^2+n\overline{X}^2]$$

$$=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2]$$

注: X为总体, $EX=\mu$ $DX=\sigma^2$ (未必正态分布)

则 $E\overline{X}=E[\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)]=\mu$;

$D\overline{X}=D[\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)]=\frac{1}{n^2}(DX_1+\cdots+DX_n)$

$=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{1}{n}\sigma^2$

$ES^2=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}EX_i^2-nE\overline{X}^2]$

$=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}(DX_i+(EX_i)^2)-n(D\overline{X}+(E\overline{X})^2)]$

$=\frac{1}{n-1}[n(\sigma^2+\mu^2)-n(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)]=\sigma^2=DX$

(3) 样本标准差 $S=\sqrt{S^2}$

(4) 样本的k阶原点矩

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k,\quad A_1=\overline{X}$$

(5) 样本的k阶中心矩

$$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k,\quad k=2,3,\cdots$$

注: $B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{(n-1)S^2}{n}$

(6) 顺序统计量.

$$\min\{X_1,X_2,\cdots X_n\},\quad \max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$$

二. χ^2, t, F分布 (密度不记) 草图上侧α分位点

(一) χ^2分布

1. 构造: 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布 $N(0,1)$分布

则 $\chi^2\triangleq X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2\sim\chi^2(n)$

r.v.

Date. /

注：n个独立标准正态的平方和为 $\chi^2(n)$.

2. 性质：

(1) 设 $X \sim N(0,1)$，则 $\chi^2 \sim \chi^2(1)$

且 $E\chi^2 = DX + (EX)^2 = 1 + 0^2 = 1$；

$D\chi^2 = E(\chi^2)^2 - (E\chi^2)^2 = EX^4 - 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} X^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - 1$

$\because X \sim \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \ x \in R$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} d\frac{x^2}{2} - 1$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0$

$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \, d e^{-\frac{x^2}{2}} - 1$

$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} 3 e^{-\frac{x^2}{2}} x^2 dx] - 1$

$= 3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - 1$

$= 3E\chi^2 - 1 = 2$

(2) $\chi^2 \sim \chi^2(n)$，则 $E\chi^2 = \underline{n}$，$D\chi^2 = \underline{2n}$

(3) 有可加性

设 $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1)$，$\chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$，且 χ_1^2，χ_2^2 独立

则 $\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$

例5.3 $X \sim N(0,4)$，X_1, X_2, X_3, X_4 为样本.

$\chi = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$.

解：$\because X_1 - 2X_2 \sim N(0, 20)$

$(D(X_1 - 2X_2) = DX_1 + 4DX_2 = 20)$

$\frac{X_1 - 2X_2}{\sqrt{20}} \sim N(0,1)$，$\left(\frac{X_1 - 2X_2}{\sqrt{20}}\right)^2 \sim \chi^2(1)$.

同理. $\left(\frac{3X_3 - 4X_4}{\sqrt{100}}\right)^2 \sim \chi^2(1)$

且 $\left(\frac{X_1 - 2X_2}{\sqrt{20}}\right)^2$ 与 $\left(\frac{3X_3 - 4X_4}{\sqrt{100}}\right)^2$ 独立

$\therefore \left(\frac{X_1 - 2X_2}{\sqrt{20}}\right)^2 + \left(\frac{3X_3 - 4X_4}{\sqrt{100}}\right)^2 \sim \chi^2(2)$

$\therefore a = \frac{1}{20}$，$b = \frac{1}{100}$，$n = 2$

(二) t分布(也叫student分布)

设 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且 X, Y 独立.

则 $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$.　　$T^2 = \frac{X^2/1}{Y/n} \sim F(1,n)$.

注：分母 两点 $\begin{cases} \text{除以}n\text{是为了消去自由度影响} \\ \text{开根号去单位.} \end{cases}$

例5.4　$X_1 + \cdots + X_9 \sim N(0, 81)$

独立 $\begin{cases} \frac{X_1 + \cdots + X_9}{9} \sim N(0,1) \\ \left(\frac{Y_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{Y_2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{Y_9}{3}\right)^2 \sim \chi^2(9) \end{cases}$

$$\frac{\frac{X_1 + \cdots + X_9}{9}}{\sqrt{\frac{Y_1^2 + \cdots + Y_9^2}{9\times 9}}} = \frac{X_1 + \cdots + X_9}{\sqrt{Y_1^2 + \cdots + Y_9^2}} \sim t(9)$$

(三) F分布

1、定义：$X \sim \chi^2(n_1)$，$Y \sim \chi^2(n_2)$，X, Y 独立.

则 $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$

2、性质：

(1) $F \sim F(n_1, n_2)$，则 $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$

(2) $T \sim t(n)$，$T^2 = \frac{X^2/1}{Y/n} \sim F(1,n)$

例5.5　$T^2 \sim F(1,n)$，$\frac{1}{T^2} \sim F(n,1)$

$\therefore U = \frac{1}{T^2} \sim F(n,1)$

例5.6　$X \sim N(0,1)$，X_1, X_2, X_3, X_4 为样本.

(2) $X_2^2 + X_3^2 \sim \chi^2(2)$；

(3) $\frac{(X_1+X_2)^2}{2} = \left(\frac{X_2+X_3}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi^2(1)$　　$X_2 + X_3 \sim N(0,2)$

(4) $\frac{\sqrt{2}X_1}{|X_2+X_3|} = \frac{X_1}{\sqrt{\frac{(X_2+X_3)^2}{2\times 1}}} \sim$ ~~t(1)~~ $t(1)$

注：$|a| = \sqrt{a^2}$ ∴分母带绝对值，则为 $t(1)$

Date. /

(8) $\frac{2X_1^2}{X_2^2+X_3^2}=\frac{X_1^2/1}{\frac{X_2^2+X_3^2}{2}}\sim F(1,2)$

注：$2X_1^2=X_1^2+X_1^2$ ∵ X_1^2 与 X_1^2 不独立

不可以为 $2X_1^2\sim\chi^2(2)$

(四) 上侧α分位点（强化再讲）

(3解) 三. 单正态总体下 $\overline{X}$ 与 S^2 的分布

(一) 单正态总体（喜欢考选择题）

总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\cdots,X_n$ 为样本，

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则

1. $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

2. $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立（←别问为什么！）

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

3. $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$

∵ $\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

4. $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

证：$\frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}}=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

P12 一、2.

解：$\overline{X}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}X_i$，$S^2=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(X_i-\overline{X})^2$

(A) $\overline{X}\sim N(0,\frac{1}{5})$

(B) $\sum_{i=1}^{5}(X_i-\overline{X})^2=\frac{4S^2}{1^2}\sim\chi^2(4)$

(C) $\frac{\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{X_3^2+X_4^2+X_5^2}{3}}}\sim t(3)$　(C)正确

(D) X_2^2 与 X_2^3 不独立.

独立

(二)双正态总体

5. 证：$\overline{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$，$\overline{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$

$$\overline{X}-\overline{Y} \sim N(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时

独立 $\begin{cases} \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1-1), \\ \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_2-1) \end{cases}$

$$\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1+n_2-2)$$

$$\frac{\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}}{\underbrace{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2(n_1+n_2-2)}}}_{S_W}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

6. 证：$\dfrac{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{(n_1-1)\sigma_1^2}}{\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{(n_2-1)\sigma_2^2}} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

6 Ch6 参数估计

一、点估计

设 $X \sim F(x;\theta)$ θ为未知参数

构造一个统计量 $g(X_1,\cdots,X_n)$ 做为 θ的估计量

$g(x_1,\cdots,x_n)$ 为 θ的估计值

记为 $\hat{\theta}=g(X_1,\cdots,X_n)$

二、点估计的方法

(一)矩估计

总体X的矩	样本的矩
EX	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$
EX^2	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$
$E(X-EX)^2$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

忆：测笔的长度，真实值为EX，

用 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 代替 EX，即 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \approx EX$

Date. /

方法. 用 $\overline{X}$ 代替 EX，即

令 $\overline{X} = EX$（含 θ） $\Rightarrow \hat{\theta} =$ 考

本质为"≈"

或 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = EX^2$ 未考过

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = DX$

例 6-1

解：$\overline{X} = EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

$= \int_0^{\theta} \frac{2x^2}{\theta^2}\,dx$

$= \frac{2x^3}{3\theta^2}\Big|_0^{\theta} = \frac{2}{3}\theta$

$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{3}{2}\overline{X}$

例 6-2. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $X_1, \cdots, X_n$

解：(1) σ^2 已知

$\overline{X} = EX = \mu \Rightarrow \hat{\mu} = \overline{X}$

(2) μ 已知，σ^2 未知

$\overline{X} = EX = \mu$，不含 σ^2，不可用

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = EX^2 = DX + (EX)^2 = \sigma^2 + \mu^2$

$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^2$

(3) μ, σ^2 未知

$\begin{cases} \overline{X} = EX = \mu, \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = DX = \sigma^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \hat{\mu} = \overline{X}$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

思考：二阶矩用 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = EX^2$ 又如何？

Date. /

(二)最大似然估计 9日 1课 9号 1日 了

1. 似然函数 $L(\theta)$:

样本取到观测值的概率(会表述)

为似然函数

$$L(\theta)=\begin{cases}P\{X_1=x_1, X_2=x_2, \cdots, X_n=x_n\} & 离. \\ f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta) & 连.\end{cases}$$

联合密度的观测值.

2. 思想:

找 $L(\theta)$ 的最大值点 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的最大似然估计.

3. 步骤:

(1) 写 $L(\theta)$

(2) 求导, 找驻点. 一般用取对数求导法.

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}\triangleq 0$$

(3) 驻点唯一, 则在此处.

无驻点, 则 $L(\theta)$ 单调, 观察易得

例 6.3 $X\sim f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1 \\ 0, & 其他\end{cases}$

解: 矩: $\overline{X}=EX=\int_0^1\theta x^{\theta}dx=\frac{\theta}{\theta+1}x^{\theta+1}\Big|_0^1=\frac{\theta}{\theta+1}$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_M=\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$$

似: 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本观测值,

则 $L(\theta)=f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)$ ~~f(~~ $\cdots f(x_n;\theta)$

$$=\theta x_1^{\theta-1}\cdot\theta x_2^{\theta-1}\cdots\theta x_n^{\theta-1}$$

$$=\theta^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta-1}$$

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^n\ln x_i$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^n\ln x_i\triangleq 0$$

$$\Rightarrow \theta=-\frac{n}{\sum_{i=1}^n\ln x_i}\Rightarrow \hat{\theta}_L=-\frac{n}{\sum_{i=1}^n\ln X_i}$$

小 x_i 换成大 X_i

Date. /

例6.4.

解：设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本观测值，

(1) $X \sim f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in R$

① $L(\mu) = f(x_1;\mu) f(x_2;\mu) \cdots f(x_n;\mu)$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$\cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \sigma^{-n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$\ln L(\mu) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - n\ln\sigma - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$

$\frac{d\ln L(\mu)}{d\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} 2(x_i-\mu)}{2\sigma^2} = \frac{x_1+\cdots+x_n-n\mu}{\sigma^2} \overset{令}{=} 0$

$\Rightarrow \mu = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = \overline{x}$

$\Rightarrow \hat{\mu} = \overline{X}$

(2) μ已知，σ^2未知

$L(\sigma^2) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$

$\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4} = 0$

$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

(3) μ, σ^2均未知（两个参数未考过）

$L(\mu,\sigma^2) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu} \overset{令}{=} 0$ 　　看(1) $\Rightarrow \hat{\mu} = \overline{X}$

$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2} \overset{令}{=} 0$ 　　看(2) $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu})^2$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

$= B_2$

考研一：$\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量，

若 $E\hat{\theta} = \theta$，称 $\hat{\theta}$ ~~的无偏~~ 为 θ 的无偏估计量.

结论：总体 X，$EX = \mu$，$DX = \sigma^2$；

则 $\overline{X}$ 为 μ 的无偏估计；（$\because E\overline{X} = \mu$）

S^2 为 σ^2 — ——　　（$\because ES^2 = \sigma^2$）

ch1 事件及概率

类型1. 与概率有关的概念.

一. 事件.

1. 定义：数学上指Ω的子集，常用A, B, 或A_i等表示；直观上指有可能发生也有可能不发生的随机现象.(还没发生)

注：A发生不是指A已经发生或必然发生，而是对未来某一现象的陈述.

2014高考题

甲乙两队进行篮球决赛，采取七场四胜制. ~~甲队主~~

甲队：主主 客客主客主.

甲队主场取胜的概率为0.6，客场取胜概率为0.5.

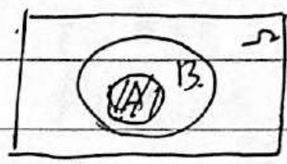
甲队以4:1获胜的概率为____.

中. $2\times0.6\times0.4\times0.5\times0.5\times0.6$ ← 不是!

$+\ 2\times0.6\times0.6\times0.5\times0.5\times0.6=0.18$

2. 三种关系(包含，相容，互斥)

(1) A发生必然导致B发生 $\Longleftrightarrow A\subset B$



$\Longleftrightarrow AB=A$

$\Longleftrightarrow A\cup B=B$

$\Longleftrightarrow A\overline{B}=\varnothing$

$\Longleftrightarrow \overline{A}\supset\overline{B}$

$\Longleftrightarrow$ B不发生则A不发生.

$\Longrightarrow P(A)\le P(B)$

(2) $A=B\Longleftrightarrow A\subset B$ 且 $B\subset A$

(3) A, B互斥(也叫互不相容) $\Longleftrightarrow AB=\varnothing$

注：$P(A)=P(B)\not\Longrightarrow A=B$

如 $X\sim U(-1,2)$

$P\{0\le X\le 1\} = P\{0\le X<1\}=P\{0<X<1\}$

$P(A)=0\not\Longrightarrow A=\varnothing$

$P(B)=1\not\Longrightarrow B=\Omega$.

$P(A)=P(AB) \nRightarrow A=AB \Leftrightarrow A\subset B$.

即由概率推不出事件的关系

3. 四种运算（和，积，差，逆）.

(1) A,B至少有一个发生 $\Leftrightarrow \underbrace{A\cup B}_{\text{规范}}$ (或 $A+B$).

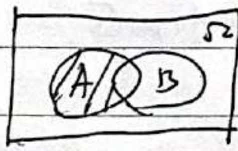
(2) A,B都发生 $\Leftrightarrow AB$ (或 $A\cap B$)

(3) A不发生 $\Leftrightarrow \bar{A}$

注：若 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$，称B为A的对立事件. 记为 $B=\bar{A}$.

(4) A发生但B不发生 $\Leftrightarrow A-B \Leftrightarrow A\cap\bar{B} \Leftrightarrow A-AB \neq A(1-B)$

$= A(\Omega-B)$.



二. 概率和条件概率

1. 概率的公理化定义

$\Omega \longrightarrow [0,1]$

$P: A \longrightarrow P(A)$ 且满足:

(1) 非负性: $\forall A,\ P(A)\geq 0$;

(2) 规范性: $P(\Omega)=1$.

(3) 可列可加性.

$\underbrace{A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots}_{\text{可列}}$ 两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

注：若 A,B互斥，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$P(\bar{A})=1-P(A)$. (涉及"至少"，"最多").

$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)$.

$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$.

2. 条件概率.(加了条件的概率).

(1) 定义：A发生的条件下，B发生的概率，称为条件概率，记为 $P(B|A)$.

当 $P(A)>0$ 时，$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$

注. $P(B) == P(B|\Omega)$.

(2) 判断：若看到：

① A发生的条件下，B发生的概率.

② 已知A出现时，B发生的 ——

均为 $P(B|A)$.

(3) 计算：

① 公式法 $P(A)>0$ 时，$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$； 99%

② 缩减样本空间 $P(A)=0$ 1%

如：(X,Y) 为二维连续型 r.v. （$\because P\{Y=b\}=0$）

$P\{X\le a|Y=b\}$，先能求出 $Y=b$ 的条件下，X的条件密度，

用之积分求解（见 ch3）.

(4) 性质.

① $0\le P(B|A)\le 1$

② $P(\bar{B}|A)=1-P(B|A)$.

③ $P(B_1\cup B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1B_2|A)$

分水岭

④ $P(B_1-B_2|A)=P(B_1|A)-P(B_1B_2|A)$.

P82 例1-1. $P(A)\in(0,1)$. $P(B|A)=1$.

解. $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=1\Rightarrow P(A)=P(AB)$

$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0$

注：$P(B|A)=1\Rightarrow\begin{cases}P(\bar{B}|A)=0\\P(\bar{A}|\bar{B})=1\end{cases}$

$P(\bar{B})\ne 0$

类型2. 五大公式

1. 加法公式.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

2、减法公式：

$$P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$$

3、乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B).$$

$$\cdot\ \xrightarrow[P(A)]{A}\ \xrightarrow[P(B|A)]{B}\ C$$

$$P(ABC)=P(AB)P(C|AB)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

4、全概率公式（思想最重要）

设 A_1, A_2, A_n 两两互斥且 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$ 且 $P(A_i)>0,\ i=1,2,\cdots,n$

$$P(B)=P(B\Omega)=P[B(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)]$$
$$=P(BA_1\cup BA_2\cup\cdots\cup BA_n)$$
$$=\underbrace{P(BA_1)+P(BA_2)+\cdots+P(BA_n)}_{\text{求此概率即可}}.$$

(最核心的思想是将B分解为一些互不相容的事件)

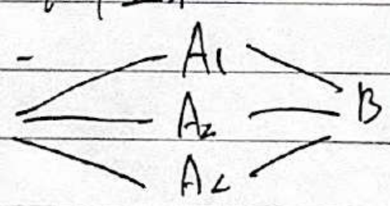
注：何时用？

若一个随机试验可分为两个阶段.

第一个阶段有各种可能结果 A_1, A_2, A_3

求第二阶段某一事件中 B 发生的概率

使用全概率公式.



则 $P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_iB)\overset{P(A_i)>0}{=}\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)$

5、贝叶斯公式.

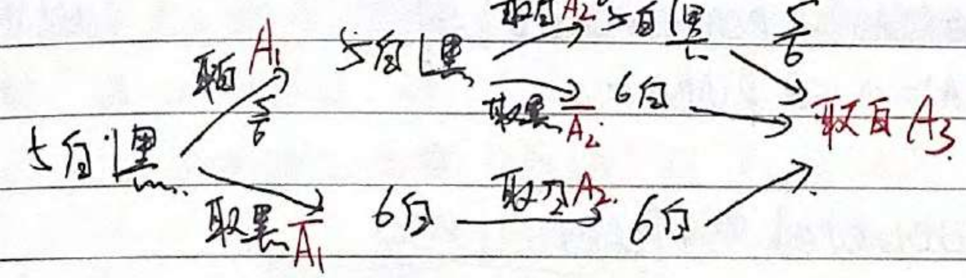
$$P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\text{——}$$

例1.3. A与$B\cup C$互不相容 $\Leftrightarrow A(B\cup C)=\emptyset$.

解. $P(\bar A\bar B\bar C)=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]=\cdots$

$\because P[A(B\cup C)]=0\Rightarrow P(AB\cup AC)=P(AB)+P(AC)-P(ABC)=0$

例1.5.



法一: $P(A_3)=P(A_1A_2A_3)+P(A_1\bar A_2A_3)+P(\bar A_1A_2A_3)$

$=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)+\_\_\_\_+\_\_\_\_$

$=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times1+\frac{1}{6}\times1\times1=\cdots$

法二: $P(A_3)=1-P(\bar A_3)$ 本题二者一样

$=1-P(A_1A_2\bar A_3)$

$=1-\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\cdots$

例1.6. 2白 4黑　　6白 2黑

↓取1　　↓取1

白	A_1A_2	白	$\xrightarrow{1}$
白	$A_1\bar A_2$	黑	$\xrightarrow{\frac{1}{2}}$ 取白 B
黑	$\bar A_1A_2$	白	$\xrightarrow{\frac{1}{2}}$
黑	$\bar A_1\bar A_2$	黑	$\xrightarrow{0}$

解. (1) $P(B)=P(A_1A_2)P(B|A_1A_2)+P(A_1\bar A_2)P(B|A_1\bar A_2)+P(\bar A_1A_2)P(B|\bar A_1A_2)+P(\bar A_1\bar A_2)P(B|\bar A_1\bar A_2)$

全概率 $=\frac{2}{6}\times\frac{6}{8}\times1+\frac{2}{6}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\times\frac{6}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\times\frac{2}{8}\times0=\frac{13}{24}$

(2) $P(A_1A_2\cup\bar A_1\bar A_2|B)=P(A_1A_2|B)+\underbrace{P(\bar A_1\bar A_2|B)}_{0}$

互斥

$=\frac{P(A_1A_2B)}{P(B)}$

$=\frac{P(A_1A_2)P(B|A_1A_2)}{\frac{13}{24}}$

$=\frac{\frac{2}{6}\times\frac{6}{8}\times1}{\frac{13}{24}}=\frac{6}{13}$

Date.　　/

类型3. 概率不等式

想到两个不等式:

(1). $0\le P(A)\le 1$; (2) $A\subset B \Rightarrow P(A)\le P(B)$.

如: $AB\subset A\subset A\cup B$

$\therefore 0\le P(AB)\le P(A)\le P(A\cup B)\le 1$.

若 $P(A)=0 \Rightarrow P(AB)=0$.

例1.4.

解 $P(A\cup B\cup C)=1 \Rightarrow P(A)+P(B)+P(C)$
$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=1$

$\Rightarrow \underset{\ge 0}{P(AB)}+\underset{\ge 0}{P(AC)}+\underset{\ge 0}{P(BC)-P(ABC)}=0$.

$\Rightarrow P(AB)=P(AC)=0,\quad P(BC)=P(ABC)=0$

注: $P(A-B)=\begin{cases} P(A)-P(AB); \\ P(A)-P(B). & 若 B\subset A \end{cases}$

例1.7. 解 $P(C|AB)=\dfrac{P(ABC)}{P(AB)}=1$

$\Rightarrow P(AB)=P(ABC)$.

$P(C)\ge P(ABC)=P(AB)$

$=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cup B)}_{\le 1}$

$\ge P(A)+P(B)-1$. 选(B)

类型4. 事件的独立性

1. 事件 A, B 独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$. 定义

$\overset{P(A)>0}{\Longleftrightarrow} P(B|A)=P(B)$

$\overset{P(B)>0}{\Longleftrightarrow} P(A|B)=P(A)$

直观上 A, B 独立指 A, B 的发生互不影响.

(互不有影响).

2、性质

(1) 下列四对事件：

A与B，A与$\bar{B}$，$\bar{A}$与B，$\bar{A}$与$\bar{B}$.

一对独立则其他三对独立.

(2) 概率为0的与概率为1的.同别的事件均独立.

(3) 设 $0<P(A)<1$ 则

A和B独立 $\Leftrightarrow P(B|A)=P(B|\bar{A})$

$\Leftrightarrow P(B|A)+P(\bar{B}|\bar{A})=1$.

(4) A,B独立 $\xrightarrow{P(AB)=P(A)P(B)}$ A,B互斥 ，$P(A)>0$，$P(B)>0$.

(5) A,B,C相互独立.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

前三式 $\Leftrightarrow$ A,B,C两两独立.

(6) 若，$A_1,\cdots,A_m,B_1,\cdots,B_n$相互独立，则

无交叠重叠的运算结果，

$f(A_1,\cdots,A_m)$与$g(B_1,\cdots,B_n)$

仍独立，

例1.8. $(\bar{A}\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})(A\cup\bar{B})$.

$=(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})$

$=(\bar{A}+\bar{A}\bar{B}+B\bar{A}+B\bar{B})(A+\bar{B})$

$=\bar{A}(A+\bar{B})$

$=\bar{A}A+\bar{A}\bar{B}=\bar{A}\bar{B}$

$\therefore$ 原式 $=P(\bar{A}\bar{B})\overset{独立}{=}P(\bar{A})P(\bar{B})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

$\boxed{\begin{array}{l} \text{补：分配律} \\ A\cap(B\cup C) \\ =A\cap(B\cup C)=A(B+C) \\ =AB+AC=AB\cup AC \\ A\cup(B\cap C) \\ =(A\cup B)\cap(A\cup C) \\ =(A+B)(A+C)=A+BC \end{array}}$

例1.9. 解：$P(\underbrace{B\bar{A}\bar{B}\cup B\bar{A}}_{恰好}|\underbrace{A\cup B}_{至少})$ 注：$A\cup B=\underbrace{A\bar{B}+\bar{A}B}_{恰有一个}+\underbrace{AB}_{全出现}$

$=\dfrac{P(A\bar{B}\cup B\bar{A})}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(A\bar{B})+P(B\bar{A})}{P(A)+P(B)-P(AB)}\overset{独立}{=}\dfrac{2P(1-P)}{2P-P^2}=\dfrac{2}{3}$

Date.　　/

注 若A、B、C相互独立，则

$P(A\cup B\cup C)=1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})$.

类型5. 贝努利概型

1. 贝努利试验：只有两个结果（$A,\bar{A}$）的试验

2. n重贝努利试验：

将一贝努利试验独立重复进行n次

每次$P(A)=p$，则A发生k次的概率为：

$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k=0,1,2,\cdots,n$.

3. 有截止的贝努利：

独立重复的贝努利试验中，每次$P(A)=p$，则第n次试验恰好（至A）第k次发生的概率为.

$\boxed{1\,|\,2\,|\,\cdots\,|\,n-1\,|\,n}$

前$n-1$次A发生$k-1$次　A第k次发生

$C_{n-1}^{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}\cdot p$

例1.10.

$\boxed{\quad|\quad|\quad|\;4\;}$

第2次成功

解：$C_3^1 p(1-p)^2\cdot p=\frac{3}{16} \Rightarrow p=\frac{1}{2}$.

$\boxed{\qquad\qquad\qquad|\;6\;}$

第2次成功

$C_5^1 p(1-p)^4\cdot p \overset{p=\frac{1}{2}}{=\!=} \frac{5}{64}$

Ch2 一维r.v.及其分布

一、随机变量：r.v.

1. 定义：$\Omega=\{\omega\}$，样本点ω未作为数．

令$X=X(\omega)$为实数，称X为一维r.v.

直观上，指取值有随机性的变量

2. 维数.（看成代中向量的维数）.

$X=(X)$：一阶矩阵，一维向量.

(X,Y)：1×2 矩阵，二维行向量，概率中称为二维 r.v.

(X,Y,Z)：概率中称为三维 r.v.

$Z=g(X,Y)$：二元函数，一维 r.v.

$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$：一维 r.v.

3. 到底在哪里取值？

离散型 r.v. 取到出来的正概率点

连续型 r.v. 取密度大于零的区间或区域内的值.

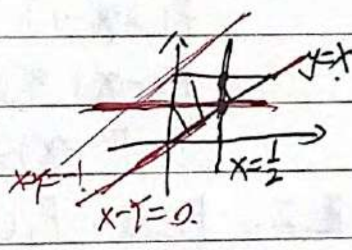
如 $X \sim f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1<x<2. \\ 0, & 其他.\end{cases}$

则 X 只在 $(-1,2)$ 取值

$(X,Y) \sim f(x,y)=\begin{cases} \underbrace{x+y}, & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0, & 其他\end{cases}$

则 (X,Y) 在 $(0,1)\times(0,1)$ 内取值.

$(X,Y) \sim f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0<x<y<1. \\ 0, & 其他.\end{cases}$



则 (X,Y) 在 ▱ 内取值

X 在 $(0,1)$ 取值，Y 在 $(0,1)$ 取值.

$X+Y$ 在 $(0,2)$ 取值.

$X-Y$ 在 $(-1,0)$ 取值.

$X\cdot Y$ 在 $(0,1)$ 取值

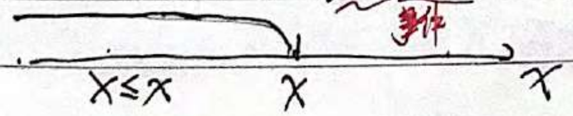
限定 $X=\frac{1}{2}$，Y 在 $(\frac{1}{2},1)$ 取值.

限定 $Y=y$ $(0<y<1)$，X 在 $(0,y)$ 取值

二、分布函数

1. 定义：称 $F(x)=P\{\underbrace{\overset{\text{r.v.}}{X}\le \overset{\text{具体实数}}{x}}_{\text{事件}}\}$，$x\in R$ 为 r.v. X 的分布函数.

注1.



几何上 $F(x)$ 表示 $X\in(-\infty, x]$ 区间内的概率.

Date.　　/

注2. $F_X(x)=P\{X\le x\}$ 实出它为r.v. X的分布函数.

$F_X(y)=P\{X\le y\}$，$y\in R$ 仍为X的分布函数

2. $F(x)$为分布函数 $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases}(1).\ 0\le F(x)\le 1,\ F(-\infty)=0,\\ \quad F(+\infty)=1\\ (2)\ \forall x_1<x_2\ 有\ F(x_1)\le F(x_2).\\ (3)\ F(x+0)=F(x)\end{cases}$

如 $F_1(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x/2, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1<x\end{cases}$ 不是分布函数.

$F_2(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x}{2}, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x\end{cases}$ 是分布函数.

注1. 若 $F(x)$是分布函数，则

$F(2x-1)$，$F(\frac{x-1}{2})$ 仍为分布函数

$F(-x)$ 不是分布函数.

$1-F(-x)$ 未必是分布函数.

注2. $F_1(x)$，$F_2(x)$ 均为分布函数，则.

① $\exists$ $a_i\ge 0$ 且 $a_1+a_2=1$ 时

$a_1F_1(x)+a_2F_2(x)$ 仍为分布函数.

② $F_1(x)F_2(x)$ 仍为分布函数. max

③ $1-[1-F_1(x)][1-F_2(x)]$ 仍为分布函数 min.

3. 求概率. $F(x)=P\{X\le x\}$

(1). $P\{X>a\}=1-F(a)$.

(2) $P\{a<X\le b\}.=F(b)-F(a)$ (见ch1.减法公式)

注. $B=\{X\le b\}$，$A=\{X\le a\}$

$\{a<X\le b\}=B\bar{A}$

(3) $P\{X=x_0\}=F(x_0)-F(x_0-0)$. ☆☆☆

若 $F(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则 $P\{X=x_0\}=0$.

(4) $P\{a<X<b\}=P\{a<X\le b\}-P\{X=b\}$

$=F(b)-F(a)-[F(b)-F(b-0)]$

$=F(b-0)-F(a)$

$P\{a\le X\le b\}=F(b)-F(a-0)$.

$P\{a\le X<b\}=F(b-0)-F(a-0)$.

类型6. 与分布函数有关的概念.

方法：盯住分布函数的分段点 x_0

$P\{X=x_0\}=F(x_0)-F(x_0-0)$

$F(x_0+0)=F(x_0)$. (右连续)

例2.1 解. $P\{X=0\}=\frac{1}{4}\Rightarrow F(0)-F(0-0)=b-0=b=\frac{1}{4}$.

又 $F(1+0)=F(1)\Rightarrow 1=a+b\Rightarrow a=\frac{3}{4}$.

三. 一维离散型 r.v.

1. 定义：取值有限或可列无穷多个.

2. 分布律：

(1). $P\{X=x_i\}=p_i$, $i=1,2,\cdots$

(2) $X\underset{\text{服从}}{\sim}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$.

(3).

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n.

3. 性质，$p_i\ge 0$ 且 $\sum p_i=1$.

4. 相关概率的计算.

$P\{a\le X\le b\}=\sum\limits_{a\le x_i\le b}P\{X=x_i\}$ (找点求和)

如: $X\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$，则.

$P\{X^2=1\}=P\{X=-1\text{或}X=1\}=P\{X=-1\}+P\{X=1\}$

互斥.

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$

四、一维连续型 r.v.

1.定义：若 X 的分布函数

$$F(x)=P\{X\le x\}$$

$$\stackrel{\text{若}}{=}\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt,\qquad f(t)\ge 0$$

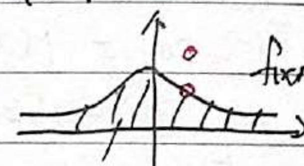
称 X 为连续型 r.v. $f(x)$ 为(概率)密度函数.

注1. $F(x)$ 必连续.

如 $X\sim F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x}{2}, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x\end{cases}$ 是分布函数.

$x=1$ 不连续，则它不是连续型 r.v. 的分布函数.

2. $f(x)$ 为密度 $\Longleftrightarrow\begin{cases}(1)\ f(x)\ge 0\\ (2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1.\end{cases}$



面积为1.

注2. $f(x)$ 表达式不唯一.

如 $X\sim F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x\end{cases}$

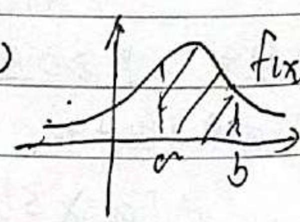
$\Rightarrow X\sim f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ $(0\le x\le 1)$ 也可

3.求概率.

(1) $P\{X=x_0\}=F(x_0)-F(x_0-0)\xlongequal{F(x)\text{连续}}0$

(2) $P\{a\le X\le b\}=P\{a<X<b\}=F(b)-F(a)$

$=\int_{-\infty}^{b}-\int_{-\infty}^{a}=\int_a^b f(x)\,dx,$



如 $X\sim f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

则 $P\{\frac{1}{2}<X<3\}=$ ______

解：$P\{\frac{1}{2}<X<3\}=P\{\frac{1}{2}<X<1\}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}2x\,dx=x^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

例2.3、

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 是密度. $\times$ 规范

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 是密度.

如 $f_1(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2.\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$f_2(x)=\begin{cases}1, & 2<x<3\\ 0, & 其他.\end{cases}$

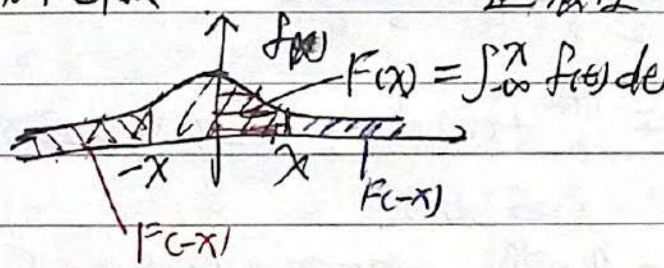
则 $f_1(x)f_2(x)\equiv 0$.

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 为分布函数 $\times$

(D) $F_1(x)F_2(x)$ ______ $\checkmark$.

注: $\underbrace{[F_1(x)F_2(x)]'}_{分布函数} = \underbrace{f_1(x)F_2(x)+F_1(x)f_2(x)}_{是密度}$

例2.4



类型7. 求分布中的待定参数

方法: 利用规范性求解. $\begin{cases}\sum_i p_i=1.\\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1.\end{cases}$

例2.5 $P\{X=k\}=\dfrac{A}{2^k\cdot k!}$, $k=0,1,2\cdots$.

则 $A=$ ______.

解: 由 $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{A}{2^k\cdot k!}=1$

$\Rightarrow A\left(1+\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2^2}}{2!}+\cdots+\frac{\frac{1}{2^n}}{n!}+\cdots\right)$.

记: $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=e^x$, $x\in R$.

$=Ae^{\frac{1}{2}}=1 \Rightarrow$ 得 $A=e^{-\frac{1}{2}}$

例2.6 $X\sim f(x)=ce^{-x^2+2x}$, $x\in R$. $c=$ ______

解: 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} c\,e^{-x^2+2x}\,dx=1$.

记: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1.$

$\Rightarrow c\,e\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\times\frac{1}{2}}}dx$

$= ce\sqrt{\pi}=1 \Rightarrow c=?.$

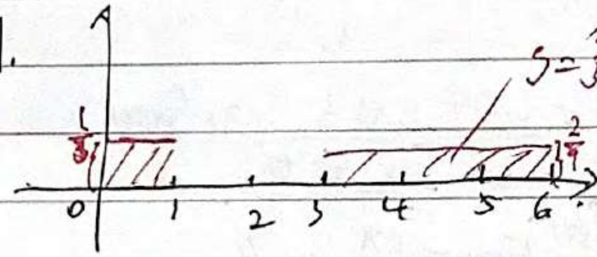
类型8. 关于一维连续型r.v.

方法：先由f(x)的表达式推出X的取值区间，

求概率的关键是找区间再积分，也可

借助于画出f(x)的草图，求概率看面积。

例2.7.



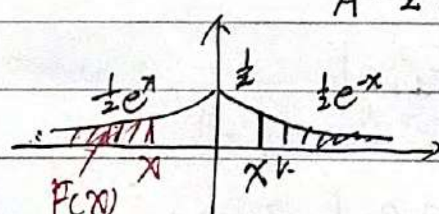
$P\{X\ge k\}=\frac{2}{3}=\int_{k}^{+\infty}f(x)dx$，$k=1$时，$k=3$时.

k右边的面积为$\frac{2}{3}$ $k=2$时. $\therefore k\in[1,3]$

例2.8. $X\sim f(x)=Ae^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$.

$A=\frac{1}{2}$.

(2)



$\left.\begin{array}{l}P\{X>0\}=\frac{1}{2}\\ P\{X>k\}=\frac{1}{4}.\end{array}\right\}\Rightarrow k>0.$

(3) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{t}dt, & x<0,\\ \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{t}dt+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-t}dt & x\ge 0,\end{cases}$

类型9. 常见分布

1. 0-1分布. $X\sim B(1,p)$.

$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-p & p\end{pmatrix}$ $EX=p$，$DX=p(1-p)$.

2. 二项分布. $X\sim B(n,p)$.

$EX=np$，$DX=np(1-p)$

$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,\cdots,n$.

注1. 背景：n次独立重复试验中事件A发生的次数 $X \sim B(n,p)$. $p=P(A)$.

注2. 将一枚骰子独立重复掷10次.

N_i 表示点数 i 出现的次数，$i=1,2,\cdots,6$.

则 $N_i \sim B(10,\frac{1}{6})$，$i=1,2,\cdots,6$ 且

$N_1+N_2+\cdots+N_6=10$

$N_1,N_2,\cdots,N_6$ 不独立.

注3. 二项分布可表示为 n 个 0-1 分布之和.

$$X_i=\begin{cases}1, & 第i次试验A发生\\ 0, & —\ ——\ 不发生\end{cases}$$

$i=1,2,\cdots,n$.

则 $\underbrace{X_1+X_2+\cdots+X_n}_{n次中A出现的次数}=X \sim B(n,p)$. 且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立.

3. 泊松分布 $X \sim P(\lambda)$.

$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$k=0,1,2,\cdots$，$\lambda>0$.

$EX=DX=\lambda$.

4. 几何分布

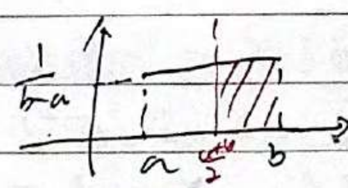
$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}\cdot p$，$k=1,2,\cdots$

$EX=\frac{1}{p}$，$DX=\frac{1-p}{p^2}$ (会推)

注：背景：射击进行到首次命中为止总共进行的射击次数X服从几何分布.

5. 均匀分布 $X \sim U(a,b)$.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$



$EX=\frac{a+b}{2}$，$DX=\frac{(b-a)^2}{12}$

注：$P\{X>\frac{a+b}{2}\}=\frac{1}{2}$

$[c,d]\subset[a,b]$ 则 $P\{c<X<d\}=\frac{d-c}{b-a}$ (长度之比).

Date.　　/

6. 指数分布 $X \sim E(\lambda)$

(1) $X \sim f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$

$EX = \frac{1}{\lambda}$, $DX = \frac{1}{\lambda^2}$

(2) $X \sim F(x) = \begin{cases} 0 & x<0, \\ 1-e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \end{cases}$

(3) 背景：寿命.

(4). 无记忆性：$s>0$, $t>0$ 则

$P\{X > s+t \mid X > s\} = P\{X > t\}$

7. 正态分布. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(1) $X \sim f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in R$.

关于 $x=\mu$ 对称

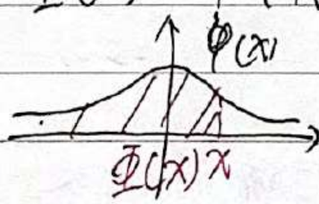
(2) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$ 积不出来!

但 $F(x)\uparrow$ 即 $F(x_1)=F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

(3) $X \sim N(0,1)$,

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in R$, 偶函数

$\Phi(x) = P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ 积不出



但可查表

$\Phi(0) = \frac{1}{2}$

$\Phi(1) = 0.8413$

$\Phi(1.645) = 0.95$

$\Phi(1.96) = 0.975$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

(4) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. $EX = \mu$, $DX = \sigma^2$,

$P\{a < X < b\} = P\{\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\}$

$= \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$

例2.9. $X \sim P(\lambda)$, $Y \sim E(\lambda)$.

$P\{X \geq 1\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

$= 1 - P\{X=0\}$. $(\because X = 0, 1, 2, \cdots)$

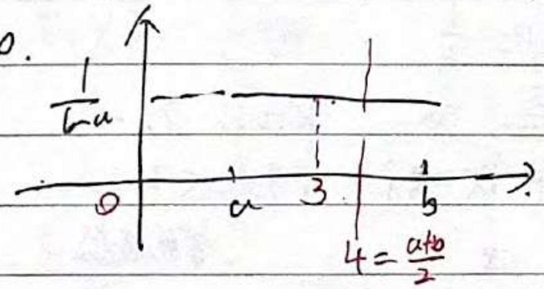
$= 1 - e^{-\lambda} = 0.5 \Rightarrow \lambda = \ln 2$.

$\therefore Y \sim E(\ln 2)$.

$P\{Y > 2\} = \int_2^{+\infty} \ln 2\, e^{-y\ln 2} dy = \frac{1}{4}$.

$Y \sim f_Y(y) = \begin{cases} \ln 2\, e^{-y\ln 2}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$

例.2.10.



$P\{X \leq 4\} = \frac{1}{2}$.
$P\{0 < X < 3\} = \frac{1}{4}$.
$a > 0$.

$\Rightarrow P\{3 < X < 4\} = \frac{1}{4}$.

$\Rightarrow \frac{4-3}{b-a} = \frac{1}{4}$.

$\therefore a = 2, b = 6 \quad X \sim U(2, 6)$.

$P\{-1 < X < 5\} = P\{2 < X < 5\} = \frac{5-2}{6-2} = \frac{3}{4}$.

例2.11. $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(0,4)$, $X_3 \sim N(5,9)$

解: $P_1 = P\{-2 \leq X_1 \leq 2\} = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1$.

$P_2 = P\{-2 \leq X_2 \leq 2\} = P\{-1 \leq \frac{X-0}{2} \leq 1\} = 2\Phi(1) - 1$.

$P_1 > P_2$.

$P_3 = P\{-2 \leq X_3 \leq 2\} = P\{-\frac{7}{3} \leq \frac{X_3 - 5}{3} \leq -1\}$

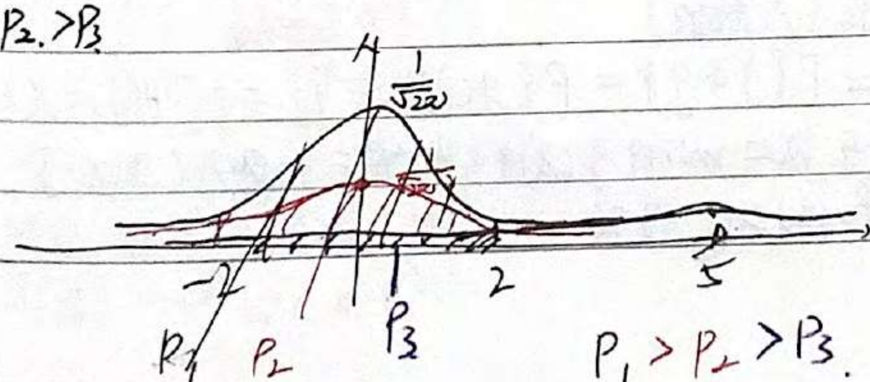
$= \Phi(-1) - \Phi(-\frac{7}{3}) = 1 - \Phi(1) - [1 - \Phi(\frac{7}{3})]$

$= \Phi(\frac{7}{3}) - \Phi(1)$

$P_2 - P_3 = 3\Phi(1) - 1 - \Phi(\frac{7}{3}) \approx 3 \times 0.8413 - 1 - \Phi(\frac{7}{3}) > 0$.

$\therefore P_1 > P_2 > P_3$

另法:



$P_1 > P_2 > P_3$.

Date. /

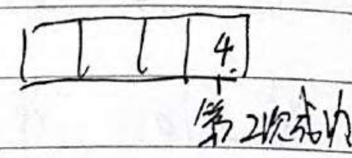
类型10. 由X分布求 $Y=g(X)$ 的分布.

(一) X为离散型，$P\{X=x_i\}=p_i$.

则 $P\{Y=g(x_i)\}=p_i$. 若 $g(x_i)$ 有相同值，应合并

补例. 在独立重复试验中，已知第四次试验恰好是第二次成功的概率为 $\frac{3}{16}$，以X表示首次成功所需要的试验次数，令

$$Y=\begin{cases}1, & X\text{取奇数};\\ 2, & X\text{取偶数};\end{cases}\quad \text{求 } F_Y(y)$$



解：设每次试验成功的概率为p.

则 $C_3^1 p\cdot(1-p)^2\cdot p=\frac{3}{16} \Rightarrow p=\frac{1}{2}$

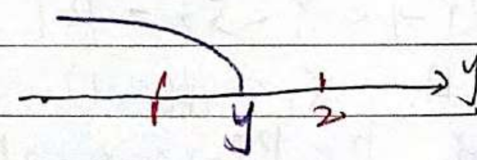
$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}\cdot p \xlongequal{p=\frac{1}{2}} \frac{1}{2^k}$，$k=1,2,\cdots$

$P\{Y=1\}=P\{X=1\}+P\{X=3\}+P\{X=5\}+\cdots$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots$ （等比级数）

$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$.

$\therefore Y\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$



$F_Y(y)=P\{Y\le y\}$，$y\in R$

$$=\begin{cases}0, & y<1\\ \frac{2}{3}, & 1\le y<2\\ 1, & 2\le y\end{cases}$$ 阶梯函数.

(二) X为连续型，$X\sim f_X(x)$

$Y=g(X)$ 可能为 $\begin{cases}\text{离散型（求分布律）}\\ \text{连续型（先}F_Y(y)\text{再}f_Y(y)\text{）}\\ \text{混合型（只能}F_Y(y)\text{）}\end{cases}$

分布函数法（万能的）

当常数看

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}=P\{\varphi(y)\le X\le\psi(y)\}$

讨论 y 与 $\alpha=\min\{g(X)\}$，$\beta=\max\{g(X)\}$.

X取 $f_X(x)>0$ 的x.

Date.　　/

画出 X, Y 的关系图 $Y=g(X)$. 由图看出 $g(X)\le y$ 片段的区间 $\varphi(y)\le X\le\psi(y)$.

$\alpha\le y\le\beta$ 时.

$$F_Y(y)=P\{\varphi(y)\le X\le\psi(y)\}=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f_X(x)dx$$

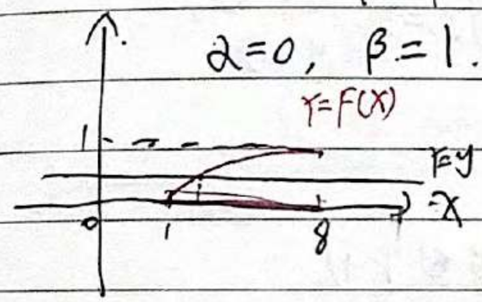
若不好积分, 直接 $f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)$.

例2.14.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \sqrt[3]{x}-1, & 1\le x<8\\ 1, & x\ge 8.\end{cases}$$

$$Y=F(X)=\begin{cases}0, & X<1\\ \boxed{\sqrt[3]{X}-1, \quad 1\le X<8}\\ 1, & X\ge 8\end{cases}$$ X 只在 $(1,8)$ 取值.

$\alpha=0$, $\beta=1$.



$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(X)\le y\}=P\{\sqrt[3]{X}-1\le y\}$.

$y<0$, $F_Y(y)=0$; $y\ge1$, $F_Y(y)=1$.

$0\le y<1$, $F_Y(y)=P\{1\le X\le(y+1)^3\}$

$$=\begin{cases}F_X[(y+1)^3]-F_X(1)\\ \int_1^{(y+1)^3}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx\end{cases}$$

$=y$.

$$\therefore F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0\le y<1\\ 1, & 1\le y\end{cases}$$ 连续

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

注: $Y=U(0,1)$, 一般地, 有如下结论:

若 X 的分布函数 $F(x)$ 连续, 则

$Y=F(X)\sim U(0,1)$.

deli得力

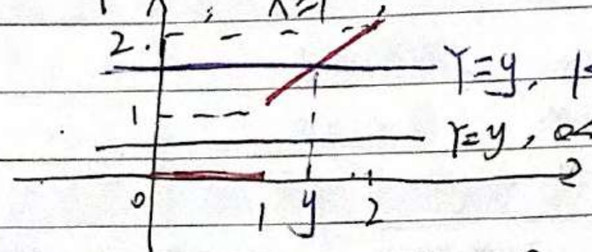
Date.　　/

补例　$X \sim U(1,3)$，X的分布函数为$F(x)$，$Y=F(X)$，

则 $P\{Y>\frac{1}{3}\} = \dfrac{1-\frac{1}{3}}{1-0} = \dfrac{2}{3}$

例2.15．$X \sim U(0,2)$，

$Y=\begin{cases} 0, & X<1 \\ X, & X\geq 1 \end{cases}$，求$F_Y(y)$



$\alpha=0$．$\beta=2$．

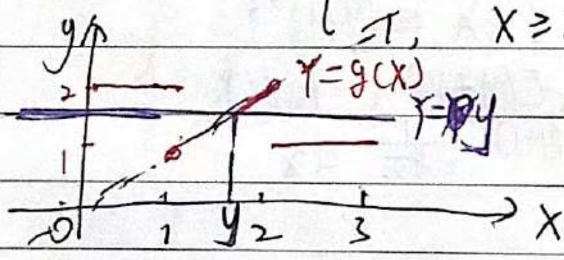
$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=\begin{cases} 0, & y<0, \\ P\{0<X<1\}=\frac{1}{2}, & 0\leq y<1, \\ P\{0<X<y\}=\frac{y}{2}, & 1\leq y<2, \\ 1, & y\geq 2, \end{cases}$

有间断点 $y=0$，仅一个．

注：$P\{Y=0\}=\frac{1}{2}$．故Y不是连续型r.v.

$Y=X$，$X\geq 1$，故Y也不是离散型r.v.

例2.16．　$Y=g(X)=\begin{cases} 2, & X\leq 1 \\ X, & 1<X<2 \\ 1, & X\geq 2 \end{cases}$．

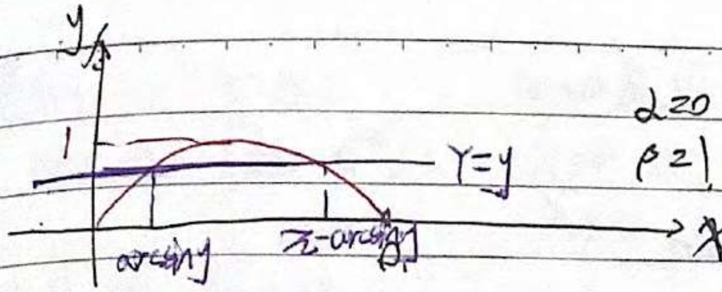


$\alpha=1$　．$\beta=2$

$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{g(X)\leq y\}$

$=\begin{cases} 0, & y<1 \\ \int_1^y+\int_2^3, & 1\leq y<2 \\ 1, & y\geq 2. \end{cases}$

(2) $P\{X\leq Y\}=P\{X\leq g(X)\}=P\{0\leq X\leq 2\}$

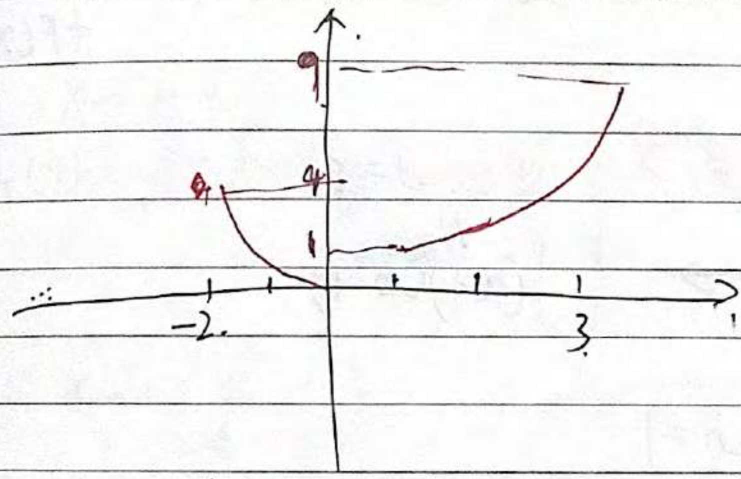


$\alpha \ge 0$
$\beta \ge 1$

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\sin X\le y\}$

$$=\begin{cases}0, & y<0\\ \int_0^{\arcsin y}+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$$

7.



ch3. 二维r.v.及分布.

(X, Y)

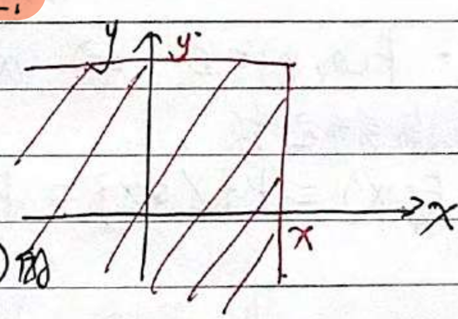
题型11. 联合分布函数和边缘分布函数.

一. 联合分布函数.

1. 定义: $F(x,y)=P\{X\le x,\ Y\le y\}$ 交

$x\in R,\ y\in R.$

几何上 $F(x,y)$ 表示 (X,Y) 落在点 (x,y) 的左下方区域的概率.



2. 性质.

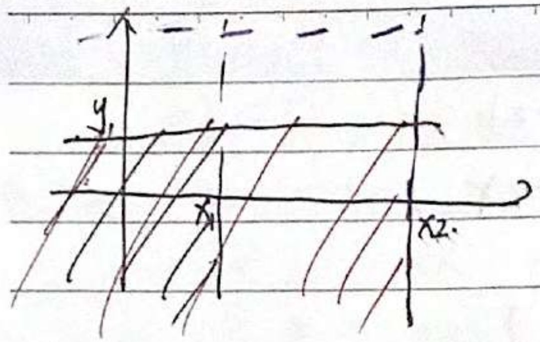
(1) $0\le F(x,y)\le 1$. $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0$.

$F(+\infty,+\infty)=1$ (两个 $+\infty$ 才是1)

(2) $\forall x_1<x_2,\ y_1<y_2$ $F(x_1,y_1)\le F(x_2,y_1)\le F(x_2,y_2)$

$\{X\le x_1,\ Y\le y_1\}\subset\{X\le x_2,\ Y\le y_1\}$

Date. /

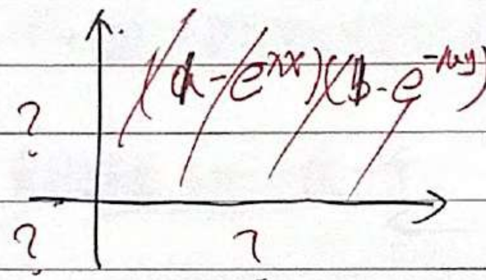


(3) $F(x+0, y) = F(x, y).$

$F(x, y+0) = F(x, y)$

(4) $P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \ge 0$

例3.1.



$F(0,0) = ?$
$\parallel$
$(a-1)(b-1)$

又 $F(+\infty, +\infty) = ab = 1$

$0 \le F(0,0) = (a-1)(b-1) = ab - a - b + 1$

$= 2 - \underbrace{(a + \frac{1}{a})}_{\ge 2} \le 0.$

$\therefore F(0,0) = 0 \Rightarrow a = b = 1.$

二. 边缘分布函数.

$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, \underbrace{Y < +\infty}_{\Omega}\} = F(x, +\infty).$

$= \lim_{y \to +\infty} F(x, y)$

$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{\underbrace{X < +\infty}_{\Omega}, Y \le y\} = F(+\infty, y)$

$= \lim_{x \to +\infty} F(x, y)$

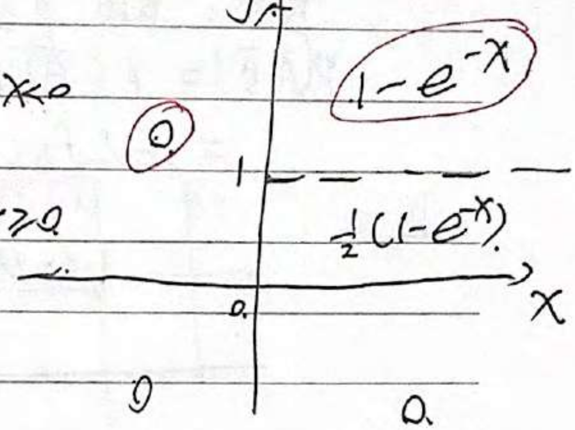
P113 例3.14.

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0\\ \frac{1}{2}(1-e^{-x}), & x\geq 0,\ 0\leq y<1\\ 1-e^{-x}, & x\geq 0,\ y\geq 1\end{cases}$$

求 $F_X(x)$, $F_Y(y)$.

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-x}, & x\geq 0\end{cases}$$

将x当常数看.



注, $X\sim E(1)$

$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{1}{2}, & 0\leq y<1\\ 1, & 1\leq y\end{cases}$$

y当常数

注: $Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

注: 由 $F(x,y)$ 求 $F_X(x)$, $F_Y(y)$ 一定要先画定义区域

讲了 P_{106} 例3.2.

例3.3. 分析

$F(x,y)=P\{\underbrace{X\leq x}_{A},\underbrace{Y\leq y}_{B}\}\triangleq P(A,B)\xlongequal{X,Y\text{独立}}P\{X\leq x\}P\{Y\leq y\}=F_X(x)F_Y(y)$

$F_X(x)=P\{X\leq x\}\triangleq P(A)$

$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}\triangleq P(B)$ $\quad F_Y(x)=P\{Y\leq x\}$

$F(x,x)=P\{X\leq x,Y\leq x\}\xlongequal{X,Y\text{独立}}P\{X\leq x\}P\{Y\leq x\}=\underbrace{F_X(x)F_Y(x)}_{\text{一元}}$

(X,Y)为二维r.v. 其分布函数为二元函数.

X为一维r.v. Y为一维r.v. 其分布函数为一元函数。

$Z=\max\{X,Y\}$ 为一维r.v. 其分布函数为一元函数

Date. /

$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{\max\{X, Y\} \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\}$

$= F(z, z)$. 选(C)

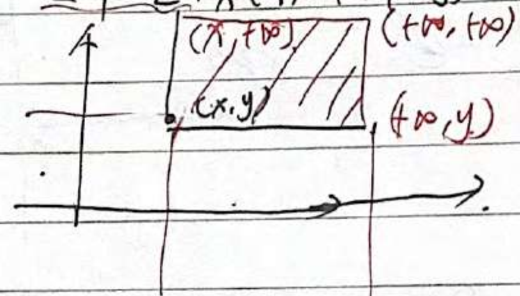
例3.4 $P\{\underbrace{X > x}_{A}, \underbrace{Y > y}_{B}\} = (\quad)$

法一：已知 $P(A), P(B)$ 和 $P(AB)$，求 $P(\bar{A}\bar{B})$.

$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)]$

$= 1 - [F_X(x) + F_Y(y) - F(x, y)]$

法二：



$P\{X > x, Y > y\} = P\{x < X < +\infty, y < Y < +\infty\}$

$= F(+\infty, +\infty) - F(x, +\infty) - F(+\infty, y) + F(x, y)$

$= 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x, y)$.

类型12. 二维离散型 r.v. 有关问题.

1. 联合分布律.

(1) $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$, $i, j = 1, 2, \cdots$

(2)

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	$y_j \cdots$	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j} —	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j} —	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}		p_{ij} —	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$ —	

错. $Y \backslash X$

$\sum_j \sum_i p_{ij} = 1$ 且 $p_{ij} \ge 0$

2. 边缘分布律.

$P\{X = x_i\} = P\{X = x_i, Y < +\infty\} = \sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\}$

$= p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{ij} + \cdots$

$\triangleq p_{i\cdot}$

$P\{Y = y_j\} = p_{1j} + p_{2j} + \cdots + p_{ij} + \cdots \triangleq p_{\cdot j}$

六. 概率.

3. 求概率. $P\{(X,Y)\in D\} = \sum_{(x_i,y_j)\in D} P\{X=x_i, Y=y_j\}$

4. 条件分布律 (与条件概率有关)

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\ i=1,2,\dots$$

$(P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}>0)$

同理 $P\{Y=y_j \mid X=x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\ j=1,2,\dots$

方法：若取值且有限多对，一定要先画出联合分布律的表格.

联合分布律 $\xrightleftharpoons[\text{分加新律}]{\vee}$ 边缘分布律

例3.6. 解:

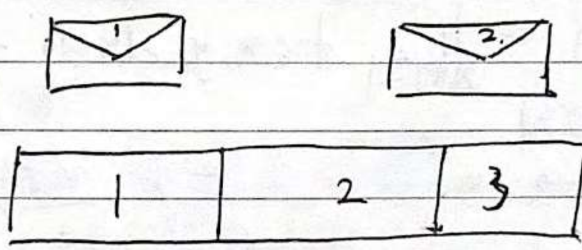
$X \backslash Y$	-1	0	1	
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

$\because P\{X^2=Y^2\}=1 \Rightarrow P\{X^2\neq Y^2\}=0.$

$\Rightarrow P\underbrace{\{X=0,Y=-1\}}_{\geq 0} + P\underbrace{\{X=0,Y=1\}}_{\geq 0} + P\underbrace{\{X=1,Y=0\}}_{\geq 0} = 0$

$P\{X+Y=0\} = P\{X=0,Y=0\} + P\{X=1,Y=-1\} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$

例3.7.



共 $3\times 3=9$ 种投法.

(1)

$X \backslash Y$	0	1	2	
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	

$P\{X=0,Y=0\} = \frac{1\times 1}{9}.$

$P\{X=0,Y=1\} = \frac{C_2^1\times 1\times 1}{9}.$

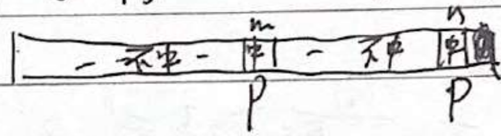
$P\{X=0,Y=2\} = \frac{1}{9}$

(4) $Y \mid X=0 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

注：限定 $X=0$，仅共 $2\times 2=4$ 种投法.

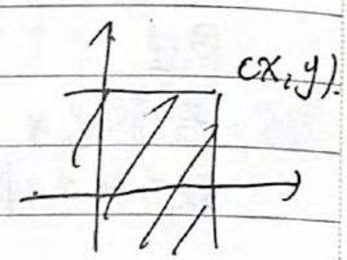
Date. /

例3.8 (3) $P\{X=m, Y=n\}=P\{$第一次命中在第m次且第二次命中在第n次$\}$
$=p^2(1-p)^{n-2}$ $m=1,2,\cdots$ $n=m+1, m+2, \cdots$



类型13 二维连续型r.v.的相关问题.

1. 定义: $F(x,y)=P\{X\leq x, Y\leq y\}$
$\triangleq \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$, $f(x,y)\geq 0$
称(X,Y)为二维连续型r.v. $f(x,y)$为联合概率密度(函数).



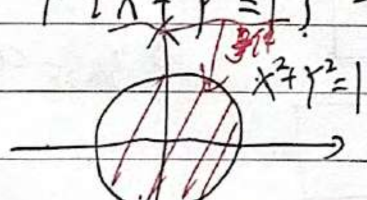
注: $F(x,y)$连续, 且 $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}=f(x,y)$.

2. $f(x,y)$为密度 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x,y)\geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1 \end{cases}$
(体积为1).

3. 求概率.
$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ (体积)

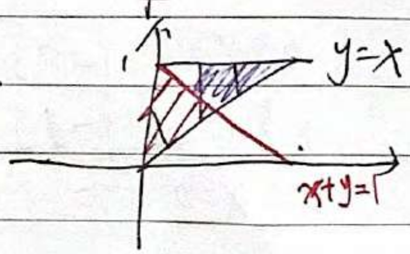
仅当二维均匀分布, 才等于比为面积之比.

如. $P\{X^2+Y^2\leq 1\}=\iint_{x^2+y^2\leq 1} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{x^2+y^2\leq 1} f(x,y)\,dx\,dy$
$=P\{X^2+Y^2\leq 1\}$



$(X,Y)\in D$: $x^2+y^2\leq 1$
则 $X^2+Y^2\leq 1$ 发生.

P_{47} 二6.



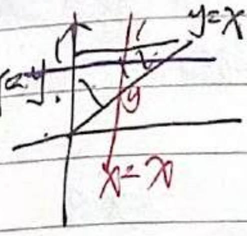
$P\{X+Y\leq 1\}=\iint_{x+y\leq 1} f(x,y)\,dx\,dy$.
$=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x} 6x\,dy=\frac{1}{4}$.

或 $P\{X+Y\leq 1\}=1-\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{1-y}^{y} 6x\,dx$.

4. 边缘密度.

$X \sim f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$. $Y \sim f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

例. $(X,Y) \sim f(x,y) = \begin{cases} 6x, & 0 \le x \le y \le 1, \\ 0, & 其它 \end{cases}$



$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} \underbrace{\int_x^1 6x\,dy}_{=6x(1-x)}, & 0<x<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} \underbrace{\int_0^y 6x\,dx}_{=3y^2}, & 0<y<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

5. 条件密度

$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为 $Y=y$ ($f_Y(y)>0$) 的条件下 X 的密度.

$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 为 $X=x$ ($f_X(x)>0$) 的条件下 Y 的密度.

上例中. $\overbrace{0<y<1 \text{ 时}}$ $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{6x}{3y^2}, & \underline{0<x<y} \\ 0, & 其它 \end{cases}$

$0<x<1$ 时

$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{6x}{6x(1-x)}, & \boxed{x<y<1} \\ 0, & 其它 \end{cases}$

注: $X=x$ ($0<x<1$) 的条件下,
$Y \sim U(x,1)$

6. 二维均匀分布.

若 $(X,Y) \sim f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S_G}, & (x,y) \in G, \\ 0, & (x,y) \notin G, \end{cases}$

则称 (X,Y) 为 G 上的均匀分布.

注: $D \subset G$, 则 $P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D \frac{1}{S_G}\,dxdy = \frac{S_D}{S_G}$ (几何

Date. /

方法：先由 $f(x,y)$ 看出 (X,Y) 的取值区域并画出该区域 G

$$P\{(X,Y)\in D\} = \iint f(x,y)\,dx\,dy \quad \begin{cases} ① 画 G \\ ② 标出 D. \\ ③ 在 G\cap D 上化为二次积分 \end{cases}$$

几何上它表示体积，仅当二维均匀分布才转化为面积之比.

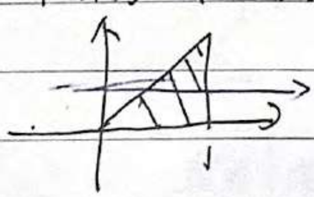
例3.10. 解：$X\sim U(0,1)$，当 $0<x<1$ 时

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0<y<x \\ 0, & 其他 \end{cases} \qquad f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

[类比：$P(AB) = P(B|A)$]

(1) $f(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x)$

$$= \begin{cases} \frac{1}{x}, & \underline{0<y<x<1} \\ 0, & 其他 \end{cases}$$



注：这是考研中的标准解答.

不需要强调其他地方都为0

(2) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

$$= \begin{cases} \underset{=-\ln y}{\int_y^1 \frac{1}{x}dx}, & 0<y<1 \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(3) $P\{\underbrace{X\le \frac{1}{2}}_{B} \mid \underbrace{Y=\frac{1}{4}}_{A}\}$ $\quad \because P\{Y=\frac{1}{4}\}=0$

公式法不适用，缩减样本空间.

$0<y<1$ 时

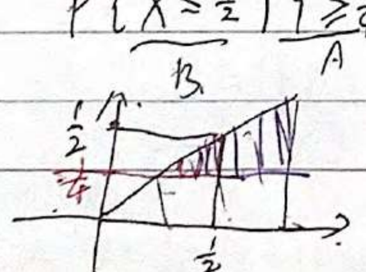
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} -\frac{1}{x\ln y}, & y<x<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|\tfrac{1}{4}) = \begin{cases} -\frac{1}{x\ln\frac{1}{4}}, & \frac{1}{4}<x<1 \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

$$P\{X\le\tfrac{1}{2} \mid Y=\tfrac{1}{4}\} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{x\ln\frac{1}{4}}\right] dx.$$

$$P\{\underbrace{X\le\tfrac{1}{2}}_{B} \mid \underbrace{Y\ge\tfrac{1}{4}}_{A}\} = \frac{P\{X\le\frac{1}{2}, Y\ge\frac{1}{4}\}}{P\{Y\ge\frac{1}{4}\}}$$

注. $P\{Y\ge\frac{1}{4}\} = \int_{\frac{1}{4}}^{1} [-\ln y]\,dy$ ① 走一维



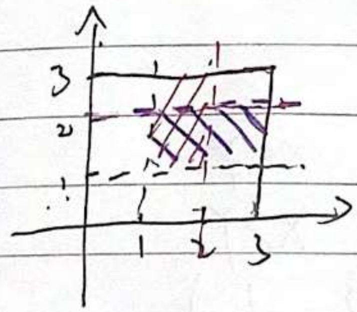
$$= \frac{\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_y^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}dx}{\int_{\frac{1}{4}}^{1} dy \int_y^1 \frac{1}{x}dx}$$ 走二维

例3.12. $X \sim U(0,3)$, $Y \sim U(0,3)$. X, Y 独立.

则 $P\{1 < \min\{X,Y\} \le 2\} =$ ______ $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

解: $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

$$= \begin{cases} \frac{1}{9} & 0<x<3,\ 0<y<3, \\ 0. & \text{其他} \end{cases}$$



$\min\{X,Y\} > 1 \Longleftrightarrow X>1$ 且 $Y>1$.

$\min\{X,Y\} \le 2 \Longleftrightarrow X, Y$ 至少有一个 ≤ 2.

$\Longleftrightarrow X \le 2$ 或 $Y \le 2$.

类型14. 判断 r.v. X与Y是否独立

1. 定义: X 与 Y 独立 $\Longleftrightarrow \forall x, y$, 有 $P\{\overbrace{X \le x}^{A}, \overbrace{Y \le y}^{B}\}$

$= \underbrace{P\{X \le x\}}_{A} \underbrace{P\{Y \le y\}}_{B}$

$\Longleftrightarrow \forall (x,y)$ 有 $F(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$

2. 判断 $\begin{cases} \text{离}: \forall i,j,\ p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j} \text{ 则独立}; \\ \text{连}: f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \text{ 则独立}. \end{cases}$

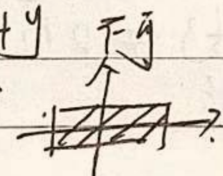
p_{ij} —— $p_{i\cdot}$

$p_{\cdot j}$

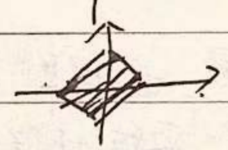
注: 若 $f(x,y)$ 满足:

① 可分离变量 $\begin{cases} x^2 \cdot y \text{ 可} \\ x^2 + y \text{ 不可} \end{cases}$

② 定义域为正矩形



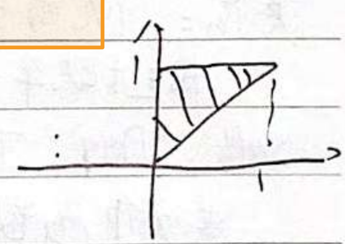
正



不正

则 X, Y 独立

如 $f(x,y) = \begin{cases} 6x, & 0 \le x \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$:

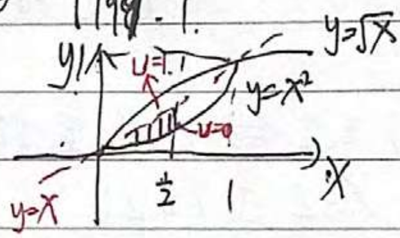


3. 直观上 X，Y 独立指 X，Y 的取值无任何联系，
如 $X^2+Y^2=1$，$X+Y=1$ 则 X，Y 不独立。

如何说明 X，Y 不独立？

若存在 x_0, y_0
$P\{X\le x_0, y\le y_0\} \ne P\{X\le x_0\}P\{Y\le y_0\}$
则 X，Y 不独立。

P_{149} 2016 P_{199}.7.



$U=\begin{cases}1, & X\le Y\\ 0, & X>Y\end{cases}$

易得 $U\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

(1) $S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\frac{1}{3}$

$f(x,y)=\begin{cases}3, & 0<x<1, x^2\le y<\sqrt{x},\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(2) U 与 X 独立吗？

$P\{U\le\frac{1}{2}, X\le\frac{1}{2}\}=P\{U=0, X\le\frac{1}{2}\}$
$=P\{X>Y, X\le\frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{x}3\,dy$

$P\{U\le\frac{1}{2}\}=P\{U=0\}=\frac{1}{2}$

$P\{X\le\frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3\,dy$

$P\{U\le\frac{1}{2}, X\le\frac{1}{2}\}\ne P\{U\le\frac{1}{2}\}P\{X\le\frac{1}{2}\}$

∴ U 与 X 不独立

P_{139}. 例 4.16.

类型 15. (离连) 型 求概率

方法：视离散型取值情况为完备事件组，
用全概率公式求解

2016. P_{199}. 7. (3) $Z=U+X$
求分布函数 $F(z)$.
↑ 离 ↑ 连.

Date. /

U取0, 1, X在(0,1)取值.

Z在(0,2)取值　　离　连.

$$F(z)=P\{Z\le z\}=P\{U+X\le z\}$$

$$=P\{U+X\le z, \underbrace{(U=0)\cup(U=1)}_{\Omega}\}$$

$$=P\{U=0, U+X\le z\}+P\{U=1, U+X\le z\}$$

$$=P\{X\le z, U=0\}+P\{X\le z-1, U=1\}$$

$$=P\{\underbrace{X\le z, X>Y}_{区域}\}+P\{X\le z-1, X\le Y\}$$

$$=\begin{cases}0, & z<0,\\ P\{X\le z, X>Y\}, & 0\le z<1,\\ P\{X>Y\}+P\{X\le z-1, X\le Y\}, & 1\le z<2,\\ 1, & 2\le z,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & z<0\\ \int_0^z dx\int_{x^2}^{x}3dy, & 0\le z<1\\ \frac{1}{2}+\int_0^{z-1}dx\int_x^{\sqrt{x}}3dy, & 1\le z<2.\\ 1, & 2\le z\end{cases}$$

$$\frac{U=0}{A}\quad \frac{U=1}{A}\quad \frac{U+X\le z}{B}$$

类型16. 求 $Z=g(X,Y)$ 的分布

一. (X,Y) 为二维离散型

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots$$

$$P\{Z=g(x_i,y_j)\}=p_{ij}$$

若 $g(x_i,y_j)$ 有相同值，应合并.

例3.15.

(X,Y)	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,1)$	$(1,2)$
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$U=X+Y$	1	2	2	3
$W=XY$	0	0	1	2

$$U\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\qquad W\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

Date. /

二. (X,Y)为二维连续型.

$(X,Y) \sim f(x,y)$

★. $Z=g(X,Y)$可能为
- 离散型 (分布律写出)
- 连续型 (先 $F_Z(z)$ 再 $f_Z(z)$).
  书上有很多公式，未必要记
- 混合型 (未考过)

$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{g(X,Y) \le z\}$

讨论 z 与 $\alpha = \min\{g(X,Y)\}$, $\beta = \max\{g(X,Y)\}$

$$= \iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)\,dx\,dy$$ (若不好积暴力求导)

见同济书七版下册 P182.
六版 下册 P179.

$$\frac{d}{dz}\int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} g(z,x)\,dx = \int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} g'_z(z,x)\,dx + g(z,\beta(z))\beta'(z) - g(z,\alpha(z))\alpha'(z)$$

P114 例3.16.

$$F_Z'(z) = \left[1 - \int_{\frac{z}{2}}^{1}\left[\int_0^{2x-z} 1\,dy\right]dx\right]'_z$$

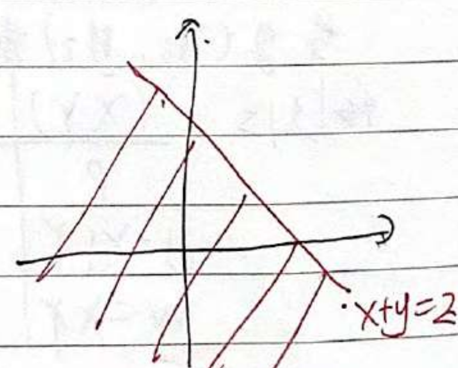
$$= \frac{d}{dz}\int_1^{\frac{z}{2}} \underbrace{\left[\int_0^{2x-z} 1\,dy\right]}_{g(z,x)=\int_0^{2x-z}1\,dy} dx$$

$$g'_z(z,x) = -1$$

$$= \int_1^{\frac{z}{2}}(-1)\,dx = 1-\frac{z}{2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^{\alpha(x)} f(y)\,dy = f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)}$$

$Z=X+Y$ 有卷积公式



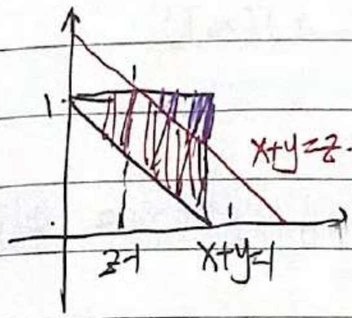
$F_Z(z) = P\{X+Y\le z\}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dy\right]}_{g(z,x)}dx$$

得 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx$

P115 例3.18.

$(X,Y) \sim f(x,y) = \begin{cases} e^{x}, & 1-x \le y \le 1,\ 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$



$\because$ (1) $Z = X+Y \in (1,2)$

$F_Z(z) = P\{X+Y \le z\}$

$z<1$, $F_Z(z)=0$; $z \ge 2$ $F_Z(z)=1$.

$1 \le z < 2$ 时, $F_Z(z) =$ 直接 $\cancel{\int_0^1 dx \int_0^{z-x} e^x dy}$

$F_Z(z) = 1 - \int_{z-1}^{1} [\int_{z-x}^{1} e^x dy] dx$

不是 $\frac{1}{2}$, 不是面积, 是体积.

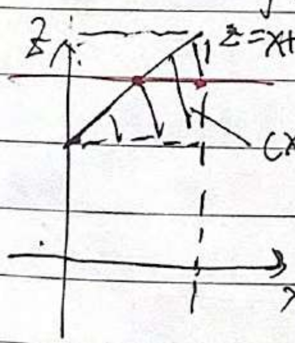
$f_Z(z) = \frac{d}{dz} \int_1^{z-1} [\int_{z-x}^{1} e^x dy] dx$ $= e^x|_{z-1}^{1} = e - e^{z-1}$

法二: 卷积公式.

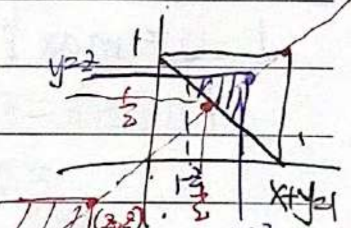
$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \begin{cases} \int_{z-1}^{1} e^x dx, & 1<z<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

其中. $f(x,y) = \begin{cases} e^x, & 1-x \le y \le 1,\ 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

$f(x, z-x) = \begin{cases} e^x, & \underline{1-x \le z-x \le 1}\ 0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 1 \le z \le x+1,\ 0 \le x \le 1. \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$



(x,z) 的联合范围.



(2) 求 $Z = \max\{X, Y\}$

$F_Z(z) = P\{\max(X,Y) \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\}$

$= \begin{cases} 0, & z < \frac{1}{2} \\ \underbrace{\int_{1-z}^{z} [\int_{1-x}^{z} e^x dy] dx}_{\text{求导}}, & \frac{1}{2} \le z < 1. \\ 1, & z \ge 1 \end{cases}$

Date. /

三(离连)型

方法：分布函数法+全概率公式.

P116. 例3.20. (2). $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.25 & 0.75\end{pmatrix}$ $Y\sim U(0,1)$.

X,Y独立, $Z=X+Y$.

解: $F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}=P\{X+Y\le z, X=0\}+P\{X+Y\le z, X=1\}$.

离 连

$=P\{Y\le z, X=0\}+P\{Y\le z-1, X=1\}$

$=P\{X=0\}P\{Y\le z\mid X=0\}+P\{X=1\}P\{Y\le z\mid X=1\}$

$\xlongequal{X,Y独立} P\{X=0\}P\{Y\le z\}+P\{X=1\}P\{Y\le z-1\}$.

Y只在(0,1)取值

比较z, $z-1$与0, 1的大小

即z与0, 1, 2的大小.

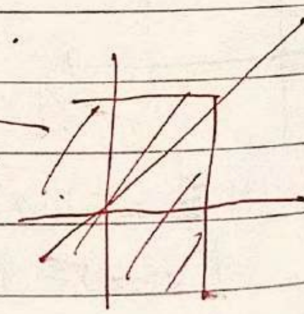
$$=\begin{cases}0, & z<0\\ 0.25z, & 0\le z<1\\ 0.25+0.75(z-1) & 1\le z<2\\ 1 & 2\le z\end{cases}$$

注 此题I可求密度

四. 记住几个结论.

1. $U=\max\{X,Y\}$的分布函数.

$F_U(z)=P\{U\le z\}=P\{\max\{X,Y\}\le z\}$

$=P\{X\le z, Y\le z\}$ 

$\xlongequal{独立} P\{X\le z\}P\{Y\le z\}$

$=F_X(z)F_Y(z)$

$\xlongequal{同分布} F_X^2(z)$.

注: 若$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立同分布, 且$X_i\sim F(x)$

则$U=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$的分布函数.

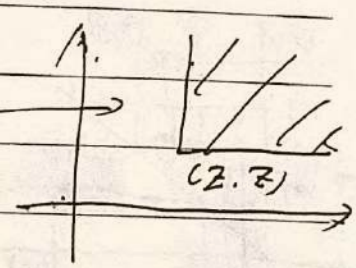
$F_U(x)=F^n(x)$ 统计要用. 必记!

2. $V=\min\{X,Y\}$ 的分布函数.

$$F_V(z)=P\{\underbrace{\min\{X,Y\}\le z}_{\{X\le z\}\text{或}\{Y\le z\}\text{ 至少有一个}\le z}\}$$

$$=1-P\{\min(X,Y)>z\}$$

$$=1-P\{X>z,Y>z\}$$



$$\overset{\text{独立}}{=}1-P\{X>z\}P\{Y>z\}$$

$$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$\overset{\text{同分布}}{=}1-[1-F_X(z)]^2.$$

注 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为独立同分布, $X_i\sim F(x)$

则 $V=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数

$$F_V(x)=1-[1-F(x)]^n.$$ 统计用, 必记.

3. 涉及独立正态的线性组合, 不好积分.

记结论:

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 则 $Y=aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$

$a\neq 0$

$$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$$

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 且 X,Y 独立

则 $aX+bY\sim N(a\mu_1+b\mu_2,\ a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$

$a^2+b^2\neq 0$.

例见类型23.

类型17. 由 $f(x,y)$ 求 $F(x,y)$ 史上最难!

$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,du\,dv.$ $x\in R$, $y\in R$

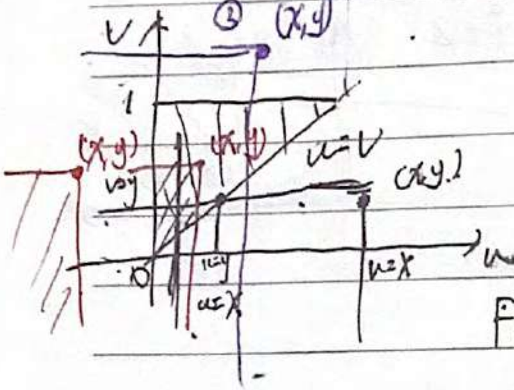
(x,y) 要跑遍整个 xOy 平面, 分片讨论.

例. $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le x<y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求 $F(x,y)$.

Date.　　/

解：$f(u,v)=\begin{cases}2, & 0\le u\le v\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$



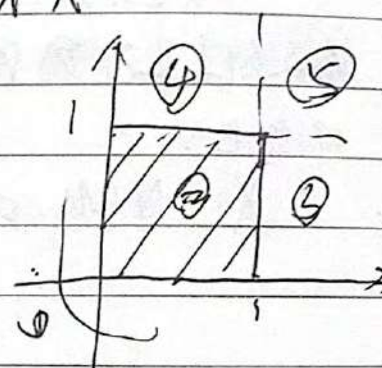
① $x<0$ 或 $y<0$
$F(x,y)=0$.

② $0\le x\le y\le 1$,
$F(x,y)=\int_0^x\left[\int_u^y 2\,dv\right]du$　　$\int_0^x[\int_x^y 2dy]dx$ 很常
$=2\int_0^x(y-u)\,du$
$=2xy-x^2$

③ $0\le x<1$, $y\ge 1$
$F(x,y)=F(x,1)=\int_0^x du\int_u^1 2\,dv=2x-x^2$.

④ $0\le y<x$, $y<1$.
$F(x,y)=F(y,y)=y^2$.

⑤ $1\le x$, $1\le y$, $F(x,y)=1$



注：1993年数四（并到数三）

Ch4 数字特征 $\begin{cases}①求\ EX,\ DX,\ cov(X,Y),\ \rho_{XY}\\ ②数一无偏估计\end{cases}$

题型18. 求期望（也叫均值）

一. 定义：$EX=\begin{cases}\sum_i x_i P\{X=x_i\}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_X(y)\,dy\end{cases}$

二. 函数的期望

1. $Eg(X)=\begin{cases}\sum_i g(x_i)P\{X=x_i\}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx\end{cases}$ 用X的分布求 $Eg(X)$

$Y=g(X)$. $Eg(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy$. 用Y的分布求 $Eg(X)$

Date.　　/

$$2.\ Eg(X,Y)=\begin{cases}\sum_j\sum_i g(x_i,y_j)\,P\{X=x_i,Y=y_j\}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\,dx\,dy\\ \text{若 } Y=\varphi(X)\text{，转化 } Eg(X,\varphi(X))\text{，转化1}\end{cases}$$

也可求出 $Z=g(X,Y)$ 的分布，再套定义法，求其期望

注：求期望的思路 ① 求自己的分布求（定义法）
② 借助于别人的分布求

三. 性质

1. $E(C)=C$；
2. $E(aX+b)=aEX+b$；
3. $E(X+Y)=EX+EY$.
4. $EXY=EX\cdot EY \Leftarrow X,Y$ 独立.（$\not\Rightarrow$）

　若 X,Y 独立，则 $EX^2Y^3=EX^2EY^3$

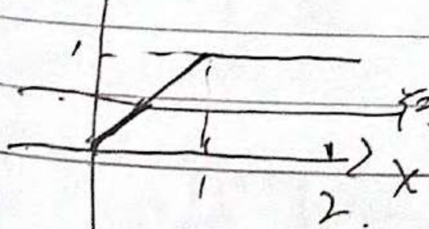
5. $X\geq a \Rightarrow EX\geq a$

P131 例.4.4　$X\sim U(0,2)$，$Y=\min\{X,1\}$，求 EY

解法一：$X\sim f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$$EY=E\min\{X,1\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{X,1\}f_X(x)\,dx$$
$$=\int_0^2\min\{X,1\}\cdot\frac{1}{2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx+\frac{1}{2}\int_1^2 dx$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

解法二：$Y=\min\{X,1\}=\begin{cases}X, & X<1\\ 1, & X\geq 1\end{cases}$



对 y　$\alpha=0$，$\beta=1$

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{g(X)\leq y\}$$

不连续 不是离散型 r.v. $=\begin{cases}0; & y<0\\ \int_0^y\frac{1}{2}dx=\frac{y}{2}; & 0\leq y<1\\ 1; & y\geq 1\end{cases}$

deli得力

Date. /

$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$ ← 很蛮度！

$EY=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy=\int_0^1 \frac{1}{2}y\,dy=\cancel{\frac{1}{4}}$

例4.5. $X\sim F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$.

则 $EX=$ ______

解. $X\sim f(x)=0.3\varphi(x)+0.7\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$

$=0.3\varphi(x)+0.35\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)$.

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot 0.3\varphi(x)\,dx+\int_{-\infty}^{+\infty} 0.35x\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)dx$

$\overset{\frac{x-1}{2}=t}{=\!=}\ 0+0.35\times 2\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+1)\varphi(t)\,dt=0.7$.

例4.6. $E(XY^2-2X^2Y+1)$

$=EX\cdot EY^2-2EX^2EY+1$

其中 $EX=0\times 0.6+10\times 0.4=4$

$EX^2=0\times 0.6+100\times 0.4=40$.

$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{y\frac{1}{2}e^{-|y|}}_{奇}dy=0$.

$EY^2=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\cdot\frac{1}{2}e^{-|y|}dy=\int_0^{+\infty} y^2e^{-y}dy=2!$

注：$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx=n!$ 伽玛函数 Γ

类型19. max, min 的期望

方法：$U=\max\{X,Y\}$, $V=\min\{X,Y\}$

求 EU, EV. 方法有二：

法一：求出 U,V 的分布，用定义法求期望

法二：转 $Eg(X,Y)$ 的公式，必须知道 (X,Y) 的分布 $f(x,y)$ 时.

$E\max\{X,Y\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{x,y\}f(x,y)\,dx\,dy$

并注意 $U=\frac{X+Y+|X-Y|}{2}$

$V=\frac{X+Y-|X-Y|}{2}$

$U+V=X+Y$, $U\cdot V=X\cdot Y$

但求 $E\max\{X_1,\cdots,X_n\}$ 求 $E\min\{X_1,\cdots X_n\}$

一定是求出它们各自的分布，用定义求期望，要用ch3公式：

公式：若 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 相互独立同分布. $X_i \sim F(x)$

$U = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$ 的分布函数

$F_U(x) = [F(x)]^n \Longrightarrow f_U(x) = ?$

记

$V = \min\{X_1, \cdots, X_n\}$ 的分布函数

$F_V(x) = 1 - [1 - F(x)]^n \Longrightarrow f_V(x) = ?$

例 4.8 解：$X_i \sim F(x) = \begin{cases} 0, & x < \theta, \\ 1 - e^{-2(x-\theta)}, & x \geq \theta. \end{cases}$

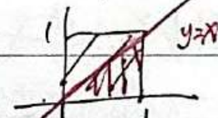
$$F_{\hat\theta}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$$
$$= \begin{cases} 0 & x < \theta \\ 1 - e^{-2n(x-\theta)}, & x \geq \theta \end{cases}$$
$$\Longrightarrow f_{\hat\theta}(x) = \begin{cases} 2n e^{-2n(x-\theta)}, & x \geq \theta, \\ 0, & x < \theta. \end{cases}$$

$$E(\hat\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\hat\theta}(x) dx$$

比较：$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_X(y) dy$

$$= \int_\theta^{+\infty} 2n x e^{-2n(x-\theta)} dx$$
$$\xlongequal{x-\theta=t} \int_0^{+\infty} (\theta + t) e^{-2nt} d\,2nt$$
$$= \theta + \frac{1}{2n}$$

$\boxed{\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!,\ n \in N}$



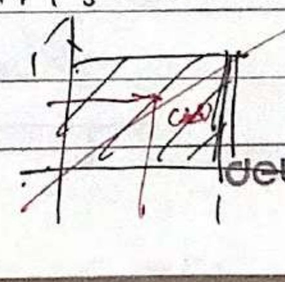
例 4.9. 解. (1) EU

法一：$EU = E\max\{X, Y\} = \int_0^1 dx \int_0^1 \max\{x, y\}(x+y) dy$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x x(x+y) dy + \int_0^1 dy \int_0^y y(x+y) dx.$$
$$= 2\int_0^1 dx \int_0^x x(x+y) dy = \cdots$$

法二：求出 U 的分布函数.

$$F_U(z) = P\{U \leq z\} = P\{\max\{X, Y\} \leq z\}$$
$$= P\{X \leq z, Y \leq z\} \quad (不独立)$$



$$= \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \int_0^z dx \int_0^z (x+y) dy & \\ 1 & z \geq 1 \end{cases}$$

Date.　　/

$\Rightarrow f_U(z)=\begin{cases}3z^2, & 0<z<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$EU=\int_{-\infty}^{+\infty} z f_U(z)dz=\int_0^1 3z^3 dz=\frac{3}{4}$

法三：$U=\frac{X+Y+|X-Y|}{2}$　（若X,Y为连续，因独立 / 找到 此法三更好）

$E(X+Y)=\int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)(x+y)=$ ——

$E|X-Y|=\int_0^1 dx\int_0^1 |x-y|(x-y)dy=$

(2). $E(UV)=EXY=\int_0^1 dx\int_0^1 xy(x+y)dy=$ ——

类型20 求方差

1.定义：$DX=E(X-EX)^2\le E(X-t)^2$

2.计算：$DX=EX^2-(EX)^2$

变形：$EX^2=DX+(EX)^2$（给了常见分布，求EX^2）

3.性质：

(1) $D(C)=0$，$DX=0\Longleftrightarrow P\{X=EX\}=1$

(2) $D(ax+b)=a^2DX$．$D(-2X+1)=4DX$

(3) $D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2cov(X,Y)$

$=E(X\pm Y)^2-[E(X\pm Y)]^2$

(4) $D(X\pm Y)=DX+DY\Leftarrow\!\not\Rightarrow X,Y$独立

评注：若$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立同分布且$X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$

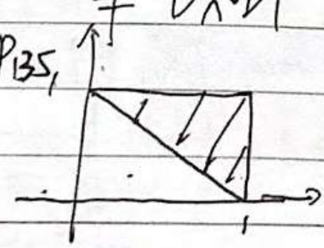
$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)\sim(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

(5) $D(XY)=E(XY)^2-[E(XY)]^2$

$\underset{若X,Y独立}{=}EX^2EY^2-(EXEY)^2$

$\ne DX\cdot DY$

例4.10 P135，



$D(X+Y)=\begin{cases}DX+DY，X,Y独立 ×\\ DX+DY+2[EXY-EXEY]　五个积分 ✓\\ 求出U=X+Y的分布\begin{cases}分布函数法\\ 卷积公式 ✓\end{cases}\\ 用定义求 DU=EU^2-(EU)^2\end{cases}$

$E(X+Y)^2-[E(X+Y)]^2=\int_0^1dx\int_{1-x}^1(x+y)^2\cdot 2dy-[\int_0^1dx\int_{1-x}^1(x+y)\cdot 2dy]^2$

补例. 一巴士客车载有20位乘客自机场开出，旅客有10个站点可以下车，如果到达一站点无乘客下车则不停车. 以X表示中途停车的次数

求 EX（假设每位乘客在各站点下车等可能，且各位乘客下车与否相互独立）

分析：X可取 0, 1, …, 10. 分布律不好求. 借助于引入分布求（化二项分布思想）

记 $X_i=\begin{cases}0, & \text{第}i\text{站无人下车.}\\ 1, & \text{第}i\text{站有人下车.}\end{cases}$ 且 $X_i\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ (\frac{9}{10})^{20} & 1-(\frac{9}{10})^{20}\end{pmatrix}$,

$EX_i=1-(\frac{9}{10})^{20}$.

$X=X_1+X_2+\cdots+X_{10}$

$EX=EX_1+EX_2+\cdots+EX_{10}=10[1-(\frac{9}{10})^{20}]$

类型21. 求协方差和相关系数.

一、协方差

1、定义: $cov(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]$

$DX=E[(X-EX)^2]$

2、计算: $cov(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}$

3、性质:

(1) $cov(X,X)=DX$

(2) $cov(X,Y)=cov(Y,X)$

(3) X, Y独立 则 $cov(X,Y)=0$. 特别地 $cov(X,C)=0$.

$cov(X,EY)=0$.

(4) $cov(aX,bY)=ab\,cov(X,Y)$

(5) $cov(X_1+X_2,Y)=cov(X_1,Y)+cov(X_2,Y)$ 考的多

如 $cov(X+Y,X-Y)=DX-DY\xrightarrow{X,Y\text{同分布}}0$

二、相关系数.

1、定义: $\rho_{XY}=cov\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}},\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}\right)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

2、性质:

(1) $|\rho_{XY}|\le 1$ 它反映X, Y间线性关系的紧密程度.

(2) $\rho_{XY}=0$ 称X, Y不相关（无线性关系）.

Date. /

(3) $|\rho_{XY}|=1 \Leftrightarrow P\{Y=aX+b,\ a\neq 0\}=1$.

$$\rho_{XY}=\begin{cases}1, & a>0\\ -1, & a<0.\end{cases}$$

如 $\underbrace{2X+Y=1}_{\text{线性关系}} \Rightarrow Y=-2X+1 \Rightarrow \rho_{XY}=-1$

例 4.13.

(A) $\mathrm{cov}(X_1,\bar{X})=\mathrm{cov}(X_1,\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n))$

$$=\frac{1}{n}[\underbrace{\mathrm{cov}(X_1,X_1)}_{DX_1}+\underbrace{\mathrm{cov}(X_1,X_2)}_{0}+\cdots+\underbrace{\mathrm{cov}(X_1,X_n)}_{0}]$$

$$=\frac{1}{n}DX_1=\frac{\sigma^2}{n}.$$

$\frac{\sigma^2}{n}$

(C) $D(X_1+\bar{X})=\begin{cases}DX_1+D\bar{X}+2\mathrm{cov}(X_1,\bar{X}).\\ D[(1+\frac{1}{n})X_1+\frac{1}{n}X_2+\cdots+\frac{1}{n}X_n] \text{ 用方差}\end{cases}$

P138 例4.14. $Y=\underbrace{\mathrm{sgn}(X)}_{\text{符号函数}}$

解: $\rho_{XY}=\dfrac{EXY-EX\cdot EY}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$

$EX=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$ $DX=\frac{[2-(-1)]^2}{12}=\frac{3}{4}$.

$Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ $EY=\frac{1}{3}$ $EY^2=1$

$DY=\frac{8}{9}$

EXY= ↓离 ↓连

$$\begin{cases}\sum_j\sum_i x_iy_jP\{X=x_i,Y=y_j\}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,dx\,dy\\ EX\mathrm{sgn}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\mathrm{sgn}(x)f_X(x)\,dx\end{cases}$$

$$=\int_{-1}^{0}x(-1)\cdot\frac{1}{3}dx+\int_0^2x\cdot1\cdot\frac{1}{3}dx$$

$$=\cdots$$

类型22. 与正态分布有关问题 $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

1. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 则 $Y=aX+b\ (a\neq0)\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$.

注: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $Y=-X\sim N(-\mu,\sigma^2)$.

故X正态, Y正态 $\not\Rightarrow$ X+Y为正态

Date. /

*2. 独立正态的线性组合为正态

3. 若 $(X,Y) \sim f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \rho\cdot\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]}$

则称 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$

$\boxed{\text{在此前提下}}$

(1) $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 自学 P111 例 3.11

(2) $aX+bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2,\ a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\rho\cdot\sigma_1\sigma_2)$

$D(aX+bY) = D(aX) + D(bY) + 2\operatorname{cov}(aX, bY)$

(3) $\begin{cases} U = a_1X + b_1Y \\ V = a_2X + b_2Y \end{cases} \Leftrightarrow (U,V) = (X,Y)\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$

当 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 时，(U,V) 仍为二维正态。

(4) $\rho = 0$，$\therefore f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$

$= f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$\Leftrightarrow$ X, Y 独立 $\Leftrightarrow$ X, Y 不相关

例 4.2. $(X,Y) \sim N(1, 0; 9, 16; -0.5)$.

$\Rightarrow X \sim N(1, 9)$　$Y \sim N(0, 16)$，$\rho_{XY} = -0.5$

(1) $Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2} \sim N(\frac{1}{3}, 3)$

(2) $\operatorname{cov}(X,Z) = \operatorname{cov}(X, \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}) = \frac{1}{3}DX + \frac{1}{2}\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.

$\therefore$ X, Z 不相关

(3) (X,Y) = 二维正态 $\Rightarrow (X, Z) = (X,Y)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (X, Z)$ 为二维正态

$\Rightarrow$ X, Z 独立。

P141. 例 4.19.

$(X,Y) \sim N(0, 1; 4, 9; 0) = \begin{cases} X \sim N(0, 4) \\ Y \sim N(1, 9) \\ \text{独立。} \end{cases}$

不可能二重积分

$P\{X < Y - 1\} = P\{X - Y < -1\} = \Phi(0) = \frac{1}{2}$　　$X-Y \sim N(-1, 13)$

deli得力

Date. /

练习：$(X,Y)\sim N(0,1;4,9;0.5)$. 则 $P\{X<Y-1\}=$ $\underline{\ 1/2\ }$

注：X 正态，Y正态，X, Y不相关 $\nRightarrow$ (X,Y)为二维正态. 见@文都路研数学 2017.7.10日视频

X正态，Y正态，X, Y独立 $\nRightarrow$ (X,Y)为二维正态.

类型23. 独立与不相关的关系.

一般，X, Y独立，$\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$ X, Y不相关 $\Leftrightarrow$ $\rho_{XY}=0$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{cov}(X,Y)=0$ 次选

$\Leftrightarrow$ $D(X\pm Y)=DX+DY$

$\Leftrightarrow$ $EXY=EX\cdot EY$ 首选

当 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$

X, Y独立 $\Leftrightarrow$ X, Y不相关 $\Leftrightarrow$ $\rho=0$

$\rho\neq 0$，则X, Y一定不独立.

例4.15. $X=\cos\theta$，$Y=\sin\theta$

$\Rightarrow X^2+Y^2=1 \Rightarrow \rho_{X^2Y^2}=-1\neq 0 \Rightarrow X^2, Y^2$ 不独立

$\Rightarrow$ X, Y也不独立. $\Rightarrow X^2, Y^2$ 不是 不相关.

$EXY=E\cos\theta\sin\theta=\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\,\frac{1}{2\pi}\,d\theta=0$

$EX=E\cos\theta\ \int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot\frac{1}{2\pi}\,d\theta=0$.

类型24. 契比雪夫不等式

$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$ $\quad\geq\varepsilon\leq$

$P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$

例5.2. $P\{|\underbrace{X+Y}_{Z}|\geq 6\}\leq\frac{D(X+Y)}{6^2}=$ ——

$EZ=0$.

类型25. 大数定律（矩估计的理论依据）

一、依概率收敛

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 为一r.v.序列

a为常数，若对 $\forall\varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}P\{\underbrace{|X_n-a|<\varepsilon}_{\text{事件}}\}=1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|X_n-a|\geq\varepsilon\}=0$.

Date. /

积 $X_n \xrightarrow{P} a$, $n \to \infty$

注. $X_n \xrightarrow{P} a$ 指 $P\{X_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ 很大.

即 X_n 以很大概率在 a 附近取值.

二. 大数定律 $\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$ 代替 笔的真实值

$$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow{P} E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)$$

↑
算术平均

即算术平均稳定在它的期望附近取值.

P152 例5-3.

$EX_i^2 = DX_i + (EX_i)^2 = \frac{1}{4} + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \xrightarrow{P}$$

$\downarrow P$ $\quad\downarrow$

$\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

类型26. 中心极限定理

结论: 大量随机变量的和服从或近似服从正态分布.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(E\sum_{i=1}^{n} X_i, D\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$(n \geq 30)$

$P\{a < \sum_{i=1}^{n} X_i < b\}$ —— 先标准化再转化 $\Phi(x)$ 查表.

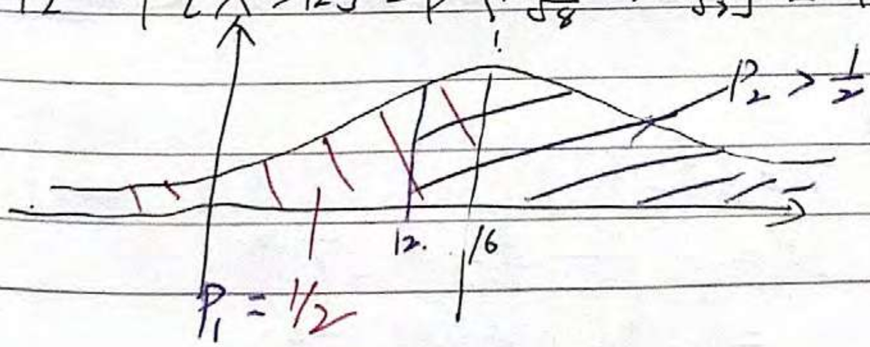
P153. 例5.4.

$$X = \sum_{i=1}^{32} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(16, 8)$$

$P_1 = P\{X < 16\} = P\{\frac{X-16}{\sqrt{8}} < 0\} = \Phi(0) = \frac{1}{2}$

$P_2 = P\{X > 12\} = P\{\frac{X-16}{\sqrt{8}} > -\frac{4}{\sqrt{8}}\} = 1 - \Phi(-\frac{4}{\sqrt{8}}) = \Phi(\frac{4}{\sqrt{8}}) > \Phi(0)$

式



Date. /

ch 6 数理统计的概念

类型27. 样本的概念

看到"$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的容量为 n 的简单随机样本"应想到"独立同分布"

具体为：

(1) $X_1, X_2, \cdots X_n$ 相互独立，且无变量重叠的运算结果 $U(X_1, \cdots, X_k)$ 与 $V(X_{k+1}, \cdots, X_n)$ 仍独立；

(2) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 与总体 X 同分布，即

$$F_{X_i}(x) = F_X(x) \quad EX_i = EX, \ DX_i = DX,$$

$$i = 1, 2, \cdots, n.$$

P158. 例6.1 $P\{\max\{X_1, X_2, X_3\} > 18\}$

$$= 1 - P\{\max\{X_1, X_2, X_3\} \leq 18\}$$

$$= 1 - P\{X_1 \leq 18, X_2 \leq 18, X_3 \leq 18\}$$

$$\overset{独立}{=} 1 - P\{X_1 \leq 18\} P\{X_2 \leq 18\} P\{X_3 \leq 18\}$$

$$\xlongequal[同分布]{X_i \sim U(12,20)} 1 - \left(\frac{18-12}{20-12}\right)^3$$

例6.2 (1) $E(X_1\overline{X})$ （X_1 与 $\overline{X}$ 不独立）.

$$= E[X_1 \cdot \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)]$$

$$= \frac{1}{n}[EX_1^2 + EX_1X_2 + \cdots + EX_1X_n]$$

$$= \frac{1}{n}[(\sigma^2 + \mu^2) + EX_1EX_2 + \cdots + EX_1EX_n]$$

$$= \frac{1}{n}[\sigma^2 + n\mu^2] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

$EX_1 = EX = \mu$.
$DX_1 = DX = \sigma^2$.

类型28. $\overline{X}$ 与 S^2 的数字特征

1. 统计量：样本的不含任何未知参数的函数 $g(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 为统计量

2. 常用的统计量

(1) 样本均值 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$；

(2) 样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right]$$

Date.　　/

(3) 样本标准差 $S=\sqrt{S^2}$

(4) 样本的k阶原点矩

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k ;\quad A_1=\overline{X}$$

(5). 样本的k阶中心矩.

$$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$$

$$B_1=0,\quad B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{(n-1)S^2}{n}$$

注: $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 不是矩!!!

(6) 顺序统计量.

$$\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\},\quad \min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$$

方法: 总体X, $EX=\mu$, $DX=\sigma^2$ 则记住:

$E\overline{X}=\mu$, $D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}$; $ES^2=\sigma^2$ 见 P_{67} 推导.

$$E\boxed{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}=E(n-1)S^2=(n-1)\sigma^2$$

并记住了个常见分布的EX, DX.

P_{159} 例6.3 (2009, III)

$$X\sim B(n,p)\qquad X_1,X_2,\cdots,X_m.$$

$$\overline{X}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i,\quad S^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2.$$

$$E\overline{X}=EX=np,\quad ES^2=DX=np(1-p)$$

$$ET=E(\overline{X}-S^2)=E\overline{X}-ES^2=np-np(1-p)$$

例6.4.

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]=\frac{1}{n_1+n_2-2}[(n_1-1)\sigma^2+(n_2-1)\sigma^2]$$

$$=\sigma^2$$

题型29. 统计中三个分布 χ^2, t, F. (密度表达式不记)

一. χ^2 分布

1.构造. 总体 $X\sim N(0,1)$, $X_1,\cdots,X_n$ 为样本,

$$\chi^2=\underbrace{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}_{n\text{个服从}N(0,1)\text{的平方和}}\sim\chi^2(n).$$

deli得力

Date.　　/

2. 性质

(1) $X \sim N(0,1) \Rightarrow X^2 \sim \chi^2(1)$ ，$EX^2=1$，$DX^2=2$ P68

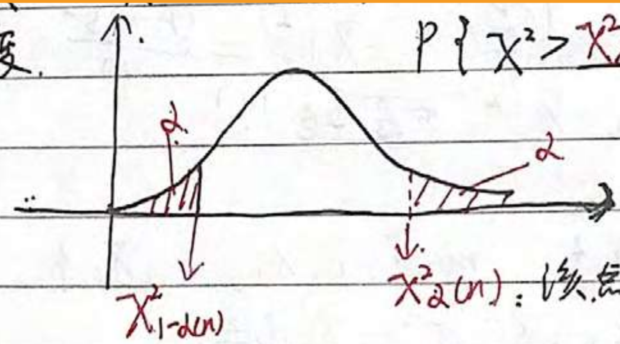
(2) $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1)$，$\chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$ 且 χ_1^2 与 χ_2^2 独立 则

$\chi_1^2+\chi_2^2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$

(3) $\chi^2 \sim \chi^2(n)$，$E\chi^2=n$，$D\chi^2=2n$.

3. 密度.

$P\{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)\} = \alpha$.



$\chi^2_\alpha(n)$：该点右边面积为 α

二. t 分布

1. 构造. $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$ X, Y 独立，

则 $T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$

2. 性质:

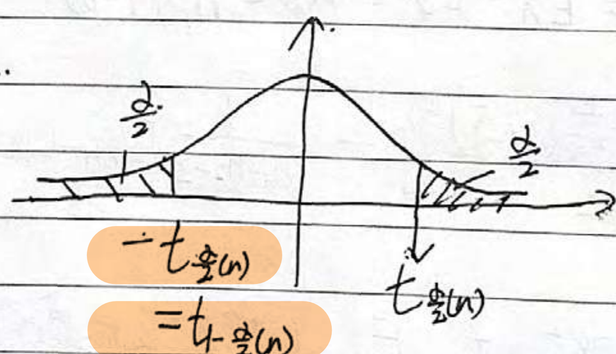
(1) $ET=0$，

(2) $T^2 = \dfrac{X^2/1}{Y/n} \sim F(1,n)$，$\dfrac{1}{T^2} \sim F(n,1)$

3. 密度.

Student 分布.

$P\{T > t_{\frac{\alpha}{2}}(n)\} = \frac{\alpha}{2}$



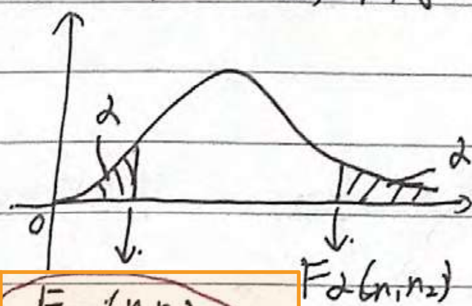
三、F 分布

1. 构造. $X \sim \chi^2(n_1)$，$Y \sim \chi^2(n_2)$. X, Y 独立

则 $F = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$

2.性质. $F \sim F(n_1, n_2)$，则 $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$

3.密度.



$$P\{F > \underline{F_\alpha(n_1,n_2)}\} = \alpha.$$

$$F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$$

P71

P160 例6.6.

$$Y = \frac{X_1^2 + \cdots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + \cdots + X_{15}^2)} \sim F(10,5)$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{X_1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2\right]/10}{\left[\left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2\right]/5} \sim F(10,5).$$

例6.7. (1) $EU = E(2X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2 + X_4^2)$

$$= 2EX_1^2 + 2EX_2^2 + EX_3^2 + EX_4^2$$

$$= 6EX_1^2 = 6[DX_1 + (EX_1)^2]$$

$$= 6[\sigma^2 + 0^2] = 6\sigma^2$$

$$DU = D[2X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2 + X_4^2]$$

$$= 4DX_1^2 + 4DX_2^2 + DX_3^2 + DX_4^2$$

$= 10DX_1^2$ $\quad$ ($\because X_1 \sim N(0,\sigma^2)$ $\quad \left(\frac{X_1}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$

$= 20\sigma^4$ $\quad$ $D\left(\frac{X_1}{\sigma}\right)^2 = 2 \Rightarrow DX_1^2 = 2\sigma^4$)

注：有人 $DU = D(6X_1^2) = 36DX_1^2$.

同分布不是"相等" $\quad X_1^2 \neq X_2^2$

(2) $$V = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2}} = \frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\frac{\left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_4}{\sigma}\right)^2}{2}}} \sim t(2)$$

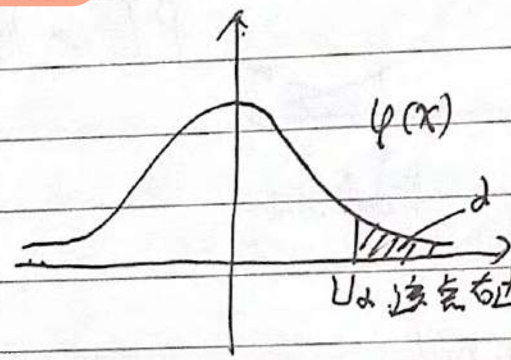
(3) $$T = \frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4|} = \frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3 + X_4}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 / 1}} \sim t(1)$$

Date.　/

注：分母 绝对值则为 t(1)　　$|a|=\sqrt{a^2}$

类型30. 上侧α分位点.

$X\sim N(0,1)$



$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$

u_α 这点右边面积为α.

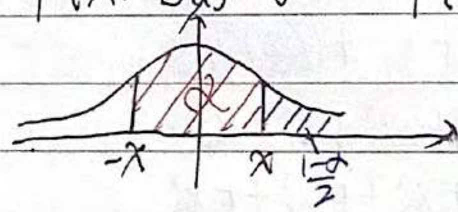
$\Phi(u_\alpha)=P\{X\le u_\alpha\}=1-\alpha$

$\Phi(1.645)=0.95=1-0.05$　　$u_{0.05}=1.645$

$\Phi(1.96)=0.975=1-0.025$，　$u_{0.025}=1.96$

P161 例6.8　$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$　　$P\{|X|<x\}=\alpha$.

问x右边面积为 $\frac{1-\alpha}{2}$



∴ $x=u_{\frac{1-\alpha}{2}}$

例6.9.　$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$.

$P\{Y>\chi^2_\alpha(1)\}=\alpha$

$\chi^2_{0.05}(1)=\ ?$

解：$P\{Y>\chi^2_{0.05}(1)\}=0.05$，$X\sim N(0,1)\Rightarrow X^2\sim\chi^2(1)$

X^2与Y同分布.

$\Rightarrow P\{X^2>\chi^2_{0.05}(1)\}=0.05$

$\Rightarrow P\{X>\sqrt{\chi^2_{0.05}(1)}$ 或 $X<-\sqrt{\chi^2_{0.05}(1)}\}=0.05$.

$\Rightarrow 2P\{X>\sqrt{\chi^2_{0.05}(1)}\}=0.05$.

$\Rightarrow P\{X>\sqrt{\chi^2_{0.05}(1)}\}=0.025$

又∵ $P\{X>\overset{\text{分位点}}{u_{0.025}}\}=0.025$.

∴ $\sqrt{\chi^2_{0.05}(1)}=u_{0.025}$.

∴ $\chi^2_{0.05}(1)=u^2_{0.025}$.

注：$X\sim N(0,1)$，$X^2\sim\chi^2(1)$　　$\chi^2_\alpha(1)=u^2_{\frac{\alpha}{2}}$

Date. /

$T \sim t(n)$，$T^2 \sim F(1, n)$，$F_\alpha(1, n) = t^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$

$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$

类型3). 单正态总体下 $\bar{X}$ 与 S^2 的分布

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, \cdots, X_n$ 为样本.

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$，则

1. $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，

$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，$\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \sim \chi^2(1)$

2. $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，$\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right)^2 \sim F(1, n-1)$

3. $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$

4. $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 不讲理

且 $\bar{X}$ 与 S^2 独立 (不讲理)

注：$D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = 2(n-1) \Rightarrow DS^2 = \frac{2\sigma^4}{n-1}$

1, 4 $\Rightarrow$ 2 见 P_{71}

例6.10. $\bar{X} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i$，$S^2 = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(X_i - \bar{X})^2$.

(A) $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{9})$，$9\bar{X} \sim N(9\mu, 9\sigma^2)$

(B) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{8S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(8)$

(C) $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/3} \sim t(n-1) = t(8)$

(D) $\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{3}}\right)^2 \sim F(1, 8)$

Date. /

类型32.矩估计

1.矩:

(1)总体矩:　总体X.

X的一阶原点矩: EX;

X的二阶原点矩: EX^2;

X的二阶中心矩: $E[(X-EX)^2]=DX$

(2)样本矩: 样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$.

样本的k阶原点矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$, $k=1,2$

样本的k阶中心矩: $B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$.

$B_1=0$, $B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

(3)关系: 由大数定律

$$\overline{X}\xrightarrow{P}E\overline{X}=EX$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=EX^2$$

$$B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right]$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2$$

$$\xrightarrow{P}EX^2-(EX)^2=DX=E[(X-EX)^2]$$

2.方法:

只考过这个

$\overline{X}\approx EX$ 写成 $\overline{X}=EX$ (优先用它)

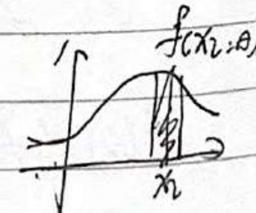
$$\begin{cases}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=EX^2\\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=DX\end{cases}$$ 未考过

类型33.最大似然估计(考的多)

θ为待估参数

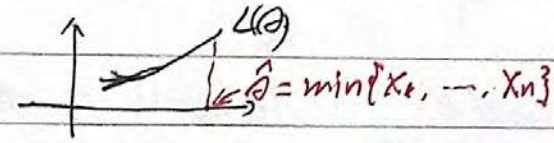
1.似然函数: 样本取到观测值的概率,$L(\theta)$ 称为似然函数;
讲出来

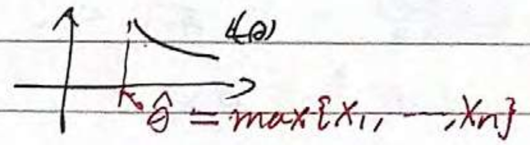
$$L(\theta)=\begin{cases}P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\} & 离.\\ f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta). & 连.\end{cases}$$



2、方法：找 θ，使 $L(\theta)$ 取到最大值的 $\hat\theta$ 为 θ 的最大似然估计.

· 求导，找驻点. $\begin{cases} \text{驻点唯一，} \hat\theta \text{，} \checkmark \\ \text{无驻点} \end{cases}$





P_{171} 例7.5 (2001, I).

样本：3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3.

解：矩估计. $\bar{X} = EX$

$$\Rightarrow \frac{3+1+3+\cdots+3}{8} = 0\times\theta^2 + 1\times 2\theta(1-\theta) + 2\times\theta^2 + 3\times(1-2\theta)$$

$$\Rightarrow 2 = 3-4\theta. \Rightarrow \hat\theta = \frac{1}{4}.$$

最大似然估计

$$L(\theta) = P\{X_1=3, X_2=1, X_3=3, \cdots, X_8=3\}$$

$$\overset{\text{独立}}{=} P\{X_1=3\}P\{X_2=1\}\cdots P\{X_8=3\}$$

$$\overset{\text{同分布}}{=} \underset{\text{4次3}}{(1-2\theta)^4} \times \underset{\text{1次2}}{\theta^2} \times \underset{\text{2次1}}{[2\theta(1-\theta)]^2} \times \underset{\text{1次0}}{\theta^2}$$

$$= 4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$$

$$\ln L(\theta) = \ln 4 + 6\ln\theta + 2\ln(1-\theta) + 4\ln(1-2\theta)$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{6}{\theta} - \frac{2}{1-\theta} - \frac{8}{1-2\theta} \triangleq 0$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{7+\sqrt{13}}{12} \text{ 或 } \theta = \frac{7-\sqrt{13}}{12}$$

$$\therefore \hat\theta_{\text{似}} = \frac{7-\sqrt{13}}{12}$$

P_{169}. 例7.1.

矩：$\bar{X} = EX = \frac{1+\theta}{2} \Rightarrow \hat\theta = 2\bar{X} - 1$

似：设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本观测值.

$$X \sim f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta-1}, & 1 \le x \le \theta \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$L(\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta).$$

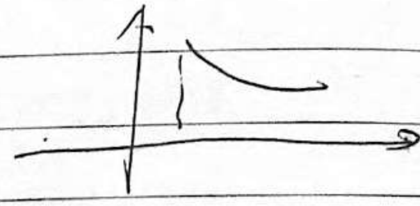
Date.　　/

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(\theta-1)^n}, & 1 \le x_i \le \theta,\ \forall i \\ \cancel{0}, & \cancel{\text{其他}} \end{cases}$$ 可不写。

$\ln L(\theta) = \ln(\theta-1)^{-n} = -n\ln(\theta-1)$

$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = -\dfrac{n}{\theta-1} < 0$

$L(\theta)$ 关于 $\theta \downarrow$



θ 越小越好，但 $\theta \ge$ 每个 x_i

$\therefore\ x_1^* = \min\{x_1,\cdots,x_n\} \le \cdots \le x_n^* = \max\{x_1,\cdots,x_n\} \le \theta$

$\therefore\ \hat{\theta} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

例7-2. $F(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} 1-\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^\beta, & x>\alpha \\ 0, & x\le\alpha. \end{cases}$

(Ⅱ) 弦推一.

(Ⅲ) $\beta = 2$,

$$X \sim f(x;\alpha) = \begin{cases} \dfrac{2\alpha^2}{x^3}, & x>\alpha \\ 0, & x\le\alpha \end{cases}$$

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本观测值.

$L(\alpha) = f(x_1;\alpha)f(x_2;\alpha)\cdots f(x_n;\alpha)$

$= \dfrac{2^n\alpha^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3},\ \underline{x_i > \alpha},\ \forall i.$

$\ln L(\alpha) = n\ln 2 + 2n\ln\alpha - 3\sum_{i=1}^n \ln x_i$

$\dfrac{d\ln L(\alpha)}{d\alpha} = \dfrac{2n}{\alpha} > 0$，$L(\alpha)$ 关于 $\alpha \uparrow$.

α 越大越好，但 $\alpha <$ 每个 x_i

$\alpha < \min\{x_1,\cdots,x_n\} \le \cdots \le \max\{x_1,\cdots,x_n\}$

$\therefore\ \hat{\alpha} = \min\{X_1,\cdots X_n\}$

Date. /

补充 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量，若

$E\hat{\theta}=\theta$，称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量

数一专项：

一、估计量的评价标准

1、无偏性：$E\hat{\theta}=\theta$，称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计

结论：$E\bar{X}=EX\triangleq\mu$，$\bar{X}$ 为 μ 的无偏估计。

$ES^2=DX\triangleq\sigma^2$，$S^2$ 为 σ^2 的无偏估计。

2、有效性：$\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$ 均为 θ 的无偏

若 $D\hat{\theta}_1<D\hat{\theta}_2$，称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效。

3、一致性：若 $\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta$。

即 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1$

或 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|\geq\varepsilon\}=0$

称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致估计

注：$\bar{X}\xrightarrow{P}\mu$，$\bar{X}$ 为 μ 的一致估计。

$S^2=\frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\xrightarrow{P}DX=\sigma^2$.

S^2 为 σ^2 的一致估计

S 为 σ 的一致估计，S 不是 σ 的无偏

即 $ES^2=\sigma^2$，但 $ES\neq\sigma$

P178 例 7.7

7.8

二、区间估计 2006 2016

三、假设检验，1998 2018.

见@文都考研数学 一全两书

2019.7.10 小杰视频.

deli得力

数一：

一、区间估计：

$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Longrightarrow(X_1,\cdots,X_n)$

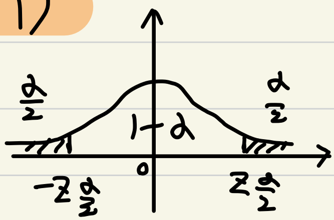
(一) 对μ的区间估计

Case 1. σ已知

1° $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

2°

$\pm z_{\frac{\alpha}{2}}$?



3° $\underline{P\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}<z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}}=\underline{\underline{1-\alpha}}$

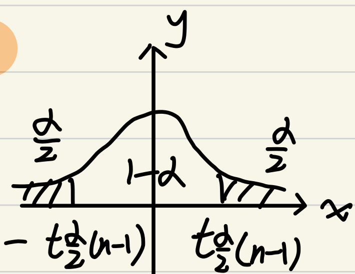
$\Downarrow$

$?<\mu<?\Longrightarrow\mu$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

Case 2. σ未知

1° $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$

2°



3° $P\left\{t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha$

$\Downarrow$

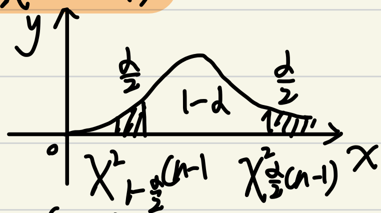
$?<\mu<?$ μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间$\left(\bar{X}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right.$

(二) σ^2 区间估计

Case 1. μ 未知.

1° $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

2°



3° $P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = 1-\alpha$

$\Downarrow$

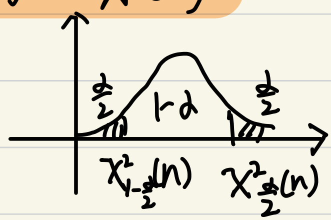
$? < \sigma^2 < ?$

σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信度区间为 $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

Case 2, μ 已知

1° $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$

2°



3° $P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) < \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right\}$

$\Downarrow$

$? < \sigma^2 < ?$

σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信度区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$$

二.假设检验

$X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow (X_1,\cdots,X_n)$

(一)对μ的假设检验

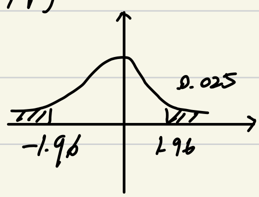
1.四级考试考生成绩服从正态分布 $\sigma=4$，取36个成绩，$\overline{X}=71.5$分，在显著性水平$\alpha=0.05$下可否认为该次考试平均成绩为70分.

解: $X \sim N(\mu,4^2)$

$H_0: \mu=70$;　　　　带等号"≤，≥"为H_0

$H_1: \mu\neq 70$.

取 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{4}{\sqrt{36}}} = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{2}{3}} \sim N(0,1)$



H_0接受域 $(-1.96, 1.96)$

$\dfrac{71.5-70}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\times 1.5 = 2.25 \notin (-1.96, 1.96)$

拒绝H_0

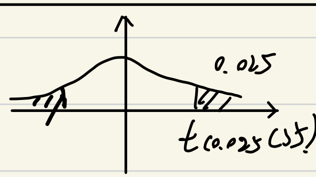
σ未知

1°. $H_0: \mu=70$.

$H_1: \mu\neq 70$

2° $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(35)$

3°



4° $\dfrac{\overline{X}-70}{\frac{S}{6}} \in (-t_{0.025}(35), t_{0.025}(35))$

4. 两类错误

(1) 第一类错误(弃真错误):当原假设 H_0 为真时,但检验结果为拒绝 H_0;

(2) 第二类错误(存伪错误):当原假设 H_0 不正确时,但检验结果为接受 H_0.

真实情况 \ 检验结果	接受 H_0	接受 H_1
接受 H_0	判断正确	第一类错误(弃真错误)
接受 H_1	第二类错误(存伪错误)	判断正确

二、假设检验的四个步骤

1.根据给定的问题,建立假设 $H_0 \leftrightarrow H_1$(带等号的为原假设).

2.根据假设及条件,选择合适的检验统计量.当 H_0 为真时,确定该统计量的分布;

3.根据显著性水平 α 及样本容量 n,确定 H_0 的拒绝域 W(见下表);

4.通过样本值,计算该统计量的值,若统计量的值 $\in W$,则拒绝 H_0,否则接受 H_0.

三、正态总体下的均值和方差的假设检验

1.单个正态总体

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本.

根据不同的问题,需要对 μ 或 σ^2 进行检验.对 μ 检验时,考察 σ^2 已知或未知;对 σ^2 检验时,考察 μ 已知或未知,因此共有四种情形.结合假设检验的两类错误,理论上已经确定出了检验统计量,

以及 H_0 的拒绝域 W,列表如下:

编号	$H_0 \leftrightarrow H_1$	H_0 为真时,检验统计量及其分布	H_0 的拒绝域 W
1	$\mu=\mu_0 \leftrightarrow \mu\neq\mu_0$	(σ^2 已知) $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\|U\|\geqslant U_{\frac{\alpha}{2}}$
	$\mu\leqslant\mu_0 \leftrightarrow \mu>\mu_0$		$U\geqslant U_\alpha$
	$\mu\geqslant\mu_0 \leftrightarrow \mu<\mu_0$		$U\leqslant -U_\alpha$
2	$\mu=\mu_0 \leftrightarrow \mu\neq\mu_0$	(σ^2 未知) $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\|T\|\geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
	$\mu\leqslant\mu_0 \leftrightarrow \mu>\mu_0$		$T\geqslant t_\alpha(n-1)$
	$\mu\geqslant\mu_0 \leftrightarrow \mu<\mu_0$		$T\leqslant -t_\alpha(n-1)$
3	$\sigma^2=\sigma_0^2 \leftrightarrow \sigma^2\neq\sigma_0^2$	(μ 已知) $\chi^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n)$	$\chi^2\geqslant\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ 或 $\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$
	$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2 \leftrightarrow \sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\geqslant\chi^2_\alpha(n)$
	$\sigma^2\geqslant\sigma_0^2 \leftrightarrow \sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(n)$
4	$\sigma^2=\sigma_0^2 \leftrightarrow \sigma^2\neq\sigma_0^2$	(μ 未知) $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\chi^2\geqslant\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
	$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2 \leftrightarrow \sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\geqslant\chi^2_\alpha(n-1)$
	$\sigma^2\geqslant\sigma_0^2 \leftrightarrow \sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$