No. Date:

第一章 行列式 (数, 式子)

一、defs.

1. 逆序 - $i, j \in N$, $i \neq j$

$i < j$, (i, j) — 顺序 $i > j$. (i, j) — 逆序

2. 逆序数 — $i_1 \cdots i_n$ 为 $1\ 2 \cdots n$ 的排列.

$i_1 \cdots i_n$ 所含逆序个数和称为逆序数. 记 $\tau(i_1 \cdots i_n)$

3. 行列式 — $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \triangleq \sum (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$

例1. $f(x) = \begin{vmatrix} 2x-1 & 2 & 3 \\ -4 & x+2 & x-1 \\ 5 & 2x+3 & x+1 \end{vmatrix}$ x^2 系数 ___

$2x-1 \begin{cases} x+2 - x+1 \\ x-1 - 2x+3 \end{cases}$ $+ (2x-1)(x+2)(x+1)$

$2 \begin{cases} -4 - x+1 \\ x-1 - 5 \end{cases}$ $- (2x-1)(x-1)(2x+3)$

$3 \begin{cases} -4 - 2x+3 \\ x+2 - 5 \end{cases}$

4. 余子式与代数余子式 — $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

取 a_{ij}.

D中去掉i行j列而成 n-1 阶行列式.

记 M_{ij} — a_{ij} 的余子式.

$A_{ij} \triangleq (-1)^{i+j} M_{ij}$

a_{ij} 的代数余子式

二、易算:

1. ① $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

② $\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ * & & \ddots \; a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \; a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

下三角 上三角

2、$V_n \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$

如：$V_4 = (a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_2-a_1)$.

Note：$V_n \neq 0 \Leftrightarrow a_1, a_2, \cdots a_n$ 两两不等.

3. $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|$

Q. 如何计算行列式？$\begin{cases} D \Rightarrow |\triangle| \text{ 或 } |\triangledown| \\ \text{降阶} \end{cases}$

三 计算性质：

(一) $D \Rightarrow$ 上(下)三角：

1. $D = D^T$
2. 对调两行(列) 行列式变为相反数.
3. 一行(列)有公因子可提.

Notes:

① 一行(列)皆为0 . $D=0$

② 两行(列)成比例. $D=0$.

4. (拆) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

例3. $D = \begin{vmatrix} a_1+b_1, & b_1+c_1, & c_1+a_1 \\ a_2+b_2, & b_2+c_2, & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$

$= 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

5. $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例4.
$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解：
$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -25 \end{vmatrix} = 25$$

$$\begin{cases} a_{11}=1 & M_{11}=2, & A_{11}=2 \\ a_{12}=2 & M_{12}=-8, & A_{12}=8 \\ a_{13}=-1 & M_{13}=-7, & A_{13}=-7 \end{cases}$$

① $\begin{cases} 2+16+7=25 \\ -10+15+20=25 \\ 33-6-2=25 \end{cases}$

$$\begin{cases} a_{21}=2 & M_{21}=5. & A_{21}=-5 \\ a_{22}=3 & M_{22}=5 & A_{22}=5 \\ a_{23}=4 & M_{23}=-5 & A_{23}=5 \end{cases}$$

② $-5+10-5=0$

$11-12+1=0$

$$\begin{cases} a_{31}=3 & M_{31}=11 & A_{31}=11 \\ a_{32}=1 & M_{32}=6 & A_{32}=-6 \\ a_{33}=2, & M_{33}=-1 & A_{33}=-1 \end{cases}$$

(二)降阶：

1. $a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=D \quad (i=1,2,\cdots n)$.
2. $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j)$

例5. 求
$$D=\begin{vmatrix} 2a & -1 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & -1 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & -1 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix},$$

解：$D=2aA_{11}+(-1)A_{12}=2aM_{11}+M_{12}$

$$=2a\begin{vmatrix} 2a & -1 & 0 \\ a^2 & 2a & -1 \\ 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a^2 & -1 & 0 \\ 0 & 2a & -1 \\ 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}=2a[2aA_{11}+(-1)A_{12}]+5a^4$$
$$=4a^2M_{11}+2aM_{12}+5a^4$$

No. Date :

(三)应用

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (*)$$

"方"

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (**)$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} . \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \cdots$$

Th1. 对(*):

① $D \neq 0 \Leftrightarrow$ (*)只有零解;

② $D = 0 \Leftrightarrow$ (*)除零解外,有无数个非零解.

Th2. 对(**):

① $D \neq 0 \Leftrightarrow$ (**)唯一解 且 $x_i = \frac{D_i}{D}$ $(1 \le i \le n)$;

② $D = 0$时, (**)或无解 或无数解.

☆ 第二章 矩阵 (表格)

一、defs:

1. 矩阵 — $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \triangleq (a_{ij})_{m\times n}$

A 称为 $m\times n$ 阵

① If $\forall a_{ij} = 0$. $A = 0$

② If $m = n$. A — n阶方阵

2. 同型矩阵 — $A_{m\times n}$ $B_{m\times n}$

$A = (a_{ij})_{m\times n}$. $B = (b_{ij})_{m\times n}$

If $\forall a_{ij} = b_{ij}$. $A = B$.

~~3. 运~~

3、运算：

① $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \cdots & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1}\pm b_{m1} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{pmatrix}$

② $k \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ & \cdots & \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$

☆ ③ $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$　$B_{n\times s} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ & \cdots & \\ b_{n1} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$

$A_{m\times n} B_{n\times s}$
内标同可乘，
外标确定型

$AB = C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} \\ \cdots & & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{ms} \end{pmatrix}$

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$
$(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,s.)$

Notes:

① $A\neq 0,\ B\neq 0 \not\Rightarrow AB\neq 0.$

② $AB\neq BA$

③ $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$

$A_{n\times n}$

$f(A) = a_nA^n + \cdots + a_1A + a_0E$ — A的矩阵多项式

如：$f(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$

$f(A) = A^2 - A - 2E = (A+E)(A-2E)$

☆ ④ $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ (*)　　$AX = 0$　(*)

$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ (**)　　$AX = b$　(**)

No. Date:

4. 伴随矩阵 — $A_{nn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

1° $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

2° $\forall a_{ij} \Rightarrow M_{ij} \Rightarrow A_{ij}$

3°

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{pmatrix}$$ — A的伴随矩阵

Note: $AA^*=A^*A=|A|E$

Q. 矩阵研究什么?

$Ax=b$

① $A_{n\times n}$, $\exists B_{n\times n}$ 使 $BA=E$ ⇒ 逆阵理论

$AX=b \Rightarrow BAX=Bb \Rightarrow X=Bb$;

② $\begin{cases} A_{n\times n}\text{不可逆}, \\ A_{m\times n}\text{且}m\neq n. \end{cases}$ ⇒ 矩阵秩理论.

二、矩阵理论(一) — 逆阵 $\begin{cases}\text{什么叫逆阵?} \\ \text{逆阵是否存在?} \\ \text{逆阵如何求?}\end{cases}$

(一) def - $A_{n\times n}$. if $\exists B_{n\times n}$, 使 $BA=E$,

(或 $AB=E$), 称 A 可逆, $B=A^{-1}$

例1. $A_{n\times n}$ $A^2-A-4E=0$ $(A+E)^{-1}$?

解: $(A+E)(A-2E)-2E=0 \Rightarrow (A+E)\cdot\frac{1}{2}(A-2E)=E$

$\therefore (A+E)^{-1}=\frac{1}{2}(A-2E)$

例2, $A\neq 0$, $A^3=0$ 求 $(E-A)^{-1}$?

解: $E=E-A^3=(E-A)(E+A+A^2)$

$\therefore (E-A)^{-1}=E+A+A^2$

(二) Notes:

1. 行列式

① $|A^T| = |A|$ ② $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

③ $|kA| = k^n|A|$ ④ $|A^*| = |A|^{n-1}$

⑤ $A_{n\times n}, B_{n\times n}$, 则 $|AB| = |A|\cdot|B|$ (Laplace 法则)

2. 逆阵:

① $(A^{-1})^{-1} = A$; ② $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;

③ $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ ④ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

⑤ $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$.

Th. $A_{n\times n}$. 则 A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

证: "$\Rightarrow$" 设 A 可逆. $\exists B$. 使 $BA = E$.

$\Rightarrow |BA| = |E| \Rightarrow |B||A| = 1$

$\therefore |A| \neq 0$

"$\Leftarrow$" 证 $|A| \neq 0$.

$\because AA^* = |A|E$, $\therefore A \cdot \frac{1}{|A|}A^* = E$.

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

Note: 若 A 可逆, 由 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* \Rightarrow \underline{A^* = |A|A^{-1}}$

例1. A、B 为 n 阶可逆阵. $(AB)^*$?

解: $(AB)^* = |AB|\cdot(AB)^{-1} = |A|\cdot|B|\cdot B^{-1}A^{-1} = |B|B^{-1}\cdot|A|A^{-1} = B^*A^*$.

例2. A, B 可逆, $|A| = 2$ $|B| = 3$.

求 $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^*$?

解: $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} A & \\ & B \end{vmatrix}\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^{-1} = |A|\cdot|B|\cdot\begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6A^{-1} & \\ & 6B^{-1} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3|A|A^{-1} & \\ & 2|B|\cdot B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3A^* & \\ & 2B^* \end{pmatrix}$.

(三) A^{-1} 求法.

方法一: 伴随法: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

例1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

解: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ $\therefore A$ 可逆.

No. Date:

$M_{11}=2$, $A_{11}=2$ $M_{12}=1$, $A_{12}=-1$ ~~$A_{13}=-2$~~ $M_{13}=-3$ $A_{13}=-3$

$M_{21}=2$, $A_{21}=-2$ $M_{22}=3$, $A_{22}=3$ $M_{23}=-1$, $A_{23}=1$

$M_{31}=2$, $A_{31}=2$ $M_{32}=1$ $A_{32}=-1$ $M_{33}=1$, $A_{33}=1$

$$A^*=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ -1 & 3 & -1\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad A^*=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ -1 & 3 & -1\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

方法二：初等变换：

1°. 方程组的同解变形：

① 对调两个方程；

② 某方程乘以 $k\neq 0$.

③ 某方程 k 倍加到另一个方程：

2° 矩阵的初等行变换：

① 对调两行；

② 某行两边乘以 $k\neq 0$.

③ 某行 k 倍加到另一行.

①~③ 称为矩阵的初等行变换.

Notes：

①. $\left\{\begin{array}{l}\text{对调两列}\\ \text{某列乘以 } k\neq 0\\ \text{某列 } k \text{ 倍加到另一列}\end{array}\right.$ 称为矩阵的初等列变换

② 矩阵初等变换 $\left\{\begin{array}{l}\text{初等行变换}\\ \text{初等列变换}\end{array}\right.$

3° 三个初等矩阵：

① $E_{ij} \triangleq \begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}$

$E_{ij}\left\{\begin{array}{l}E_{ij}A \text{ — } A \text{ 对调 } i,j \text{ 行}\\ AE_{ij} \text{ — } A \text{ 对调 } i,j \text{ 列}\\ |E_{ij}|=-1\neq 0\\ \underline{E_{ij}^{-1}=E_{ij}}\end{array}\right.$

② $E_i(c) \triangleq \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}$

$(c\neq 0)$

$E_i(c)$ $\begin{cases} E_i(c)A \text{ — A的i行c倍} \\ AE_i(c) \text{ — A的i列c倍} \\ |E_i(c)| = c \neq 0 \\ E_i^{-1}(c) = E_i(\frac{1}{c}) \end{cases}$

③ $E_{ij}(k) \triangleq \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \;\; 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}$

$E_{ij}(k)$ $\begin{cases} E_{ij}(k)A \text{ — A的j行k倍加到i行} \\ AE_{ij}(k) \text{ — A的i列k倍加到j列} \\ |E_{ij}(k)| = 1 \neq 0 \\ E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k) \end{cases}$

例1. $A_{n\times n}$可逆. A对调i,j行变成B.

① $AB^{-1}=?$ ② A^*、B^*关系?

解: ① $B = E_{ij}A$

$AB^{-1} = A\cdot A^{-1}E_{ij}^{-1} = E_{ij}^{-1} = E_{ij}$.

② $B^* = |B|\cdot B^{-1} = -|A|\cdot A^{-1}E_{ij} = -A^*E_{ij}$

例2. $A_{3\times3}$. A的2,3行对调成B.

B的1列4倍加到第3列成E, 求A.

解: $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1&0&4\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} = E$.

$$A = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1&0&4\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&-4\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$$

4°. Q1. $A_{n\times n}$, 且 $|A|\neq 0$ $A \xrightarrow{行} E$? √

$$A = \begin{pmatrix} 1&-1\\2&3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1&-1\\0&5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1&-1\\0&1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1&0\\0&1 \end{pmatrix} = E.$$

$E_{12}(1)\cdot E_2(-\frac{1}{5})\cdot E_{21}(-2)\cdot A = E$

No. Date :

Q2. $A_{n\times n}$ $|A|=0$ $A \xrightarrow{行} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$? ×

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q3. $A_{n\times n}$. $|A|=0$. $A \xrightarrow{行列} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

5° A^{-1} 求法.

Th. $A_{n\times n}$ 且 $|A|\neq 0$ 则

$(A \vdots E) \xrightarrow{行} (E \vdots A^{-1})$.

proof. ∵ A可逆.

∴ ∃ $P_1, \cdots P_s$ 使 $A \xrightarrow{行} P_s\cdots P_2P_1A=E$, $P_s\cdots P_2P_1=A^{-1}$

∴ $E \xrightarrow{行} P_s\cdots P_2P_1E=A^{-1}$

∴ $(A \vdots E) \xrightarrow{行} (E \vdots A^{-1})$.

例3. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 求 A^{-1}

解: $|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}=6\neq 0$

$$(A \vdots E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{3}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{3}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{6} & 0 & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{3}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{6} & 0 & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{3}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \quad \therefore A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

三. 矩阵理论(二)— 矩阵秩理论.

(一) def — $A_{m\times n}$. A中任取r行和r列所成的r阶行列式称为A的r阶子式. ($C_m^r\cdot C_n^r$个)

若① ∃至少一个r阶子式不为0;

② ∀ r+1阶子式皆为0.

称r为A的秩, 记 $r(A)=r$.

Notes：

① $A_{m\times n} \Rightarrow \begin{cases} r(A)\le m \\ r(A)\le n \end{cases} \Leftrightarrow r(A)\le \min\{m,n\}$

② $\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$　$r(\alpha)\le 1$.　$r(\alpha)=\begin{cases} 0, & \alpha=0 \\ 1, & \alpha\ne 0 \end{cases}$

③ $A_{n\times n}$.　$|A|\ne 0$　A可逆

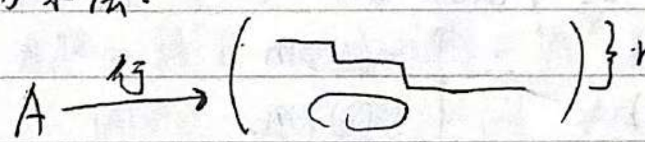
$|A|\ne 0$，称A非奇异矩阵.

$|A|\ne 0 \Leftrightarrow r(A)=n$.　A称为满秩

（$|A|=0 \Leftrightarrow r(A)<n$，A—降秩）

A可逆、非奇异、满秩 等价

(二) $r(A)$求法：



$r(A)=r$

Note：

① $r(A)=0 \Leftrightarrow A=0$.

② $r(A)\ge 1 \Leftrightarrow A\ne 0$

③ $r(A)\ge 2 \Leftrightarrow$ A至少两行不成比例.

(三) 性质：

1. $r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$

Note：见A^TA，AA^T

例1. $A_{m\times n}$，$A^TA=0$，证：$A=0$

证：$A^TA=0 \Rightarrow r(A^TA)=0$

$\because r(A)=r(A^TA)$

$\therefore r(A)=0 \Rightarrow A=0$

2. $r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$

Note：① 见 $A-B$、$A+B$、$r(A)+r(B)$

② $\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$　$\alpha^T\beta$—左转右不转为数

$\alpha\beta^T$—左不转右转为阵

例2. $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$

证：$r(A)\le 2$

证：$r(A)\le r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)=r(\alpha)+r(\beta)\le 1+1=2$

3. $A_{m\times n}$, $B_{n\times s}$. 则 $\begin{cases} r(AB)\le r(A) \\ r(AB)\le r(B)\end{cases} \Leftrightarrow r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$.

Note：见 $r(A)$, $r(B)$, $r(AB)$.

例3. $A_{m\times n}$. $B_{n\times m}$ $(n>m)$. 且 $AB=E$

求 $r(A)$, $r(B)$.

解：$\because |E|=1\ne 0$ $\therefore r(AB)=m$

$\because \begin{cases} r(A)\ge r(AB) \\ r(B)\ge r(AB)\end{cases}$ $\therefore \begin{cases} r(A)\ge m \\ r(B)\ge m.\end{cases}$

又$\because$ $r(A)\le m$ $r(B)\le m$.

$\therefore$

☆ 4. $A_{m\times n}$. $B_{n\times s}$. 且 $AB=0$ 则 $r(A)+r(B)\le n$

Note：见 $AB=0$.

例4. 设 $A_{n\times n}$ 可逆，证：逆阵唯一.

证：设 $AB=E$, $AC=E$.

$\Rightarrow AB-AC=0 \Rightarrow A(B-C)=0$

$\therefore r(A)+r(B-C)\le n$

$\because r(A)=n$

$\therefore r(B-C)=0 \Rightarrow B-C=0 \Rightarrow B=C$

例5. $A_{n\times n}$, $A^2-A-2E=0$

证：$r(E+A)+r(2E-A)=n$

证：1°. $(A+E)(A-2E)=0 \Rightarrow (E+A)(2E-A)=0$

2°. $r(E+A)+r(2E-A)\le n$

3°. $r(E+A)+r(2E-A)\ge r(3E)=r(E)=n$.

5. P、Q 可逆，则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$

证：令 $B=PA$ $r(B)=r(PA)\leq r(A)$

∵ P 可逆 ∴ $A=P^{-1}B$.

$r(A)=r(P^{-1}B)\leq r(B)$

∴ $r(A)=r(PA)$

☆ 6. $r(A^*)\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$

证：① $r(A)=n$

由 $r(A)=n \Rightarrow |A|\neq 0$.

$AA^*=|A|E \Rightarrow |A||A^*|=|A|^n$

∵ $|A|\neq 0$ ∴ $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$

∴ $r(A^*)=n$;

② $r(A)=n-1$

由 $r(A)=n-1<n \Rightarrow |A|=0$

∵ $AA^*=|A|E=0$

∴ $r(A)+r(A^*)\leq n \Rightarrow r(A^*)\leq 1$;

∵ $r(A)=n-1$ ∴ $\exists M_{ij}\neq 0$

$\Rightarrow \exists A_{ij}\neq 0 \Rightarrow A^*\neq 0 \Rightarrow r(A^*)\geq 1$ ∴ $r(A^*)=1$;

③ $r(A)<n-1 \Rightarrow \forall M_{ij}=0 \Rightarrow \forall A_{ij}=0$.

$\Rightarrow A^*=0 \Rightarrow r(A^*)=0$.

No. Date:

第三章 向量

一. defs.

1. $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ — n维列向量

① $|\alpha| \triangleq \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$

② If $|\alpha|=0$，则 $\alpha=0$.

If $|\alpha|=1$，α —— 单位向量.

If $\alpha\neq 0$，则 α 对应单位向量 $\alpha^{\circ}=\frac{1}{|\alpha|}\alpha$.

2、内积 — $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$

$(\alpha,\beta)\triangleq a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

Notes:

① $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$

② $(\alpha,\alpha)=|\alpha|^2$

$(\alpha,\alpha)\geq 0$ $\quad(\alpha,\alpha)=0\Rightarrow\alpha=0$

③ $(\alpha,\underbrace{k_1\beta_1+\cdots+k_s\beta_s}_{\text{线性组合}})=k_1(\alpha,\beta_1)+k_2(\alpha,\beta_2)+\cdots+k_s(\alpha,\beta_s)$.

④ If $(\alpha,\beta)=0$，称 α,β 正交 记 $\alpha\perp\beta$

☆ 零向量与任何向量正交.

二. 向量理论(一) — 相关性与线性表示理论

(一) 背景.

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ \cdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}\quad(*)$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \cdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\quad(**)$$

root.

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\ \cdots\ \alpha_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0 \quad (*).$$

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b \quad (**)$$

(二) $(*)$. $(**)$ 解情形.

1. $\begin{cases}x_1-2x_2=0.\\x_1+x_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases}$

2. $\begin{cases}x_1-x_2=0\\2x_1+x_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0.\end{cases},\ \begin{cases}x_1=1\\x_2=1\\x_3=-2\end{cases} \cdots$

$(*)$ $\begin{cases}\text{只有零解}\\\text{除零解外有无数非零解}\end{cases}$

1. $\begin{cases}x_1-x_2=2\\2x_1+x_2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=1\\x_2=-1\end{cases}$

2. $\begin{cases}x_1-x_2=2\\x_1+x_3=3\end{cases} \Rightarrow$ 无数解.

3. $\begin{cases}x_1+x_2=1\\2x_1+2x_2=4\end{cases} \Rightarrow$ 无解.

$(**)$ $\begin{cases}\text{有解}\\\text{无解}.\end{cases}$

(三) defs.

1. 相关性 — $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$: $x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=0$ $(*)$

Case1. $(*)$只有零解. 即$(*)$成立 $\Leftrightarrow x_1=\cdots=x_n=0$

称 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关

Case2. $(*)$有非零解. 即$\exists$不全为0的$k_1, \cdots, k_n$, 使$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$

称$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性相关.

2. 线性表示 — $\alpha_1, \cdots \alpha_n, b$.

$$x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=b \quad (**)$$

Case 1. (**) 有解

即 $\exists k_1,\cdots,k_n$，使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=b$

称 b 可由 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性表示.

Case 2. (**) 无解

称 b 不可由 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性表示.

(四) 性质:

1. $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 至少 $\exists$ 一个向量可由其余向量线性表示

证:"$\Rightarrow$" 设 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性相关

即 $\exists$ 不全为 0 的 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$.

设 $k_1\neq0\Rightarrow\alpha_1=-\frac{k_2}{k_1}\alpha_2-\cdots-\frac{k_n}{k_1}\alpha_n$.

"$\Leftarrow$" 设 $\alpha_k=l_1\alpha_1+\cdots+l_{k-1}\alpha_{k-1}+l_{k+1}\alpha_{k+1}+\cdots+l_n\alpha_n$

$\Rightarrow l_1\alpha_1+\cdots+l_{k-1}\alpha_{k-1}+(-1)\alpha_k+l_{k+1}\alpha_{k+1}+\cdots+l_n\alpha_n=0$

$\therefore\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性相关.

Notes:

① 含零向量向量组线性相关.

如: $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

② α,β 线性相关 $\Leftrightarrow$ 成比例

"$\Rightarrow$" $\exists$ 不全为 0 的 k_1k_2，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$

设 $k_1\neq0\Rightarrow\alpha_1=-\frac{k_2}{k_1}\alpha_2$.

"$\Leftarrow$" 设 $\beta=k\alpha\Rightarrow k\alpha+(-1)\beta=0$.

$\Rightarrow\alpha,\beta$ 线性相关.

2. 设 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性无关

① $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,b$ $\overset{\text{线性无关}}{\Longleftrightarrow}$ b 不可由 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性表示.

② $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,b$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 则 b 可由 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性表示.

且表示法唯一.

证: 设 $\alpha_1\cdots\alpha_n,b$ 线性相关.

$\Rightarrow\exists$ 不全为 0 的 $k_1,\cdots,k_n,k_0$ 使.

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n+k_0b=0.$$

$k_0\neq 0$.

若 $k_0=0$. $\Rightarrow k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$

∵ $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关 ∴ $k_1=\cdots=k_n=0$

矛盾. ∴ $k_0\neq 0$

$\Rightarrow b=-\frac{k_1}{k_0}\alpha_1-\cdots-\frac{k_n}{k_0}\alpha_n$.

(反) 设 $b=l_1\alpha_1+\cdots+l_n\alpha_n$.

$b=t_1\alpha_1+\cdots+t_n\alpha_n$.

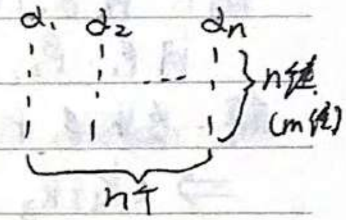
$\Rightarrow (l_1-t_1)\alpha_1+\cdots+(l_n-t_n)\alpha_n=0$.

∵ $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性无关

∴ $l_1=t_1,\cdots,l_n=t_n$.

3. 全组无关 ⇒ 部分组无关

4. 部分组相关 ⇒ 全组相关



5. $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$为n个n维向量

则$\alpha_1\cdots\alpha_n$线性无关 $\Leftrightarrow |\alpha_1\cdots\alpha_n|\neq 0$

证: $\alpha_1\cdots\alpha_n$无关 $\Leftrightarrow x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=0$ 只有零解.

$\Leftrightarrow D\neq 0$ 即 $|\alpha_1\cdots\alpha_n|\neq 0$.

6. $\alpha_1\cdots\alpha_n$为n个m维向量 ($m<n$) 则$\alpha_1\cdots\alpha_n$线性相关.

证: 令$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $r(A)\leq m<n$.

$\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow Ax=0$有非零解.

∵ $r(A)<n$ ∴ $Ax=0$ 有非零解.

∴ $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性相关

7. ① 添个数 提高相关性.

② 添维数 提高无关性.

8. 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$非零且两两正交, 则$\alpha_1\cdots\alpha_n$线性无关, 反之不对.

证: "⇒" 设 $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$.

由 $(\alpha_1, k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n)=0 \Rightarrow k_1(\alpha_1,\alpha_1)=0$

No.　　Date :

$\because (\alpha_1,\alpha_1)=|\alpha_1|^2>0$　　$\therefore k_1=0$.

$(\alpha_2, k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n)=0 \Rightarrow k_2(\alpha_2,\alpha_2)=0$

$\because (\alpha_2,\alpha_2)=|\alpha_2|^2>0$　　$\therefore k_2=0$

- - -

$k_n\alpha_n=0$

$\because \alpha_n\neq 0$　　$\therefore k_n=0$

$\therefore \alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性无关

"$\not\Leftarrow$" 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$　$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$　$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\because \begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$　$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

而 $(\alpha_1,\alpha_2)=1\neq 0$，$(\alpha_1,\alpha_3)=1\neq 0$，$(\alpha_2,\alpha_3)=2\neq 0$

例1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$；$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$　$\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$

问 β_1,β_2,β_3 相关性.

解：令 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$

$\Rightarrow (k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

$\therefore \begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\end{cases}$　(※)

$\because$

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0.$$

$\therefore$ (※) 只有零解.　$\therefore \beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关.

例2. $\alpha_1\sim\alpha_4$ 无关. $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$　$\beta_3=\alpha_3+\alpha_4$　$\beta_4=\alpha_4+\alpha_1$

问 $\beta_1\sim\beta_4$ 相关性？

解：法一. 令 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4=0$

$\Rightarrow (k_1+k_4)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3+(k_3+k_4)\alpha_4=0$

No. Date :

$\because \alpha_1 \sim \alpha_4$ 线性无关.

$$\therefore \begin{cases} k_1+k_4=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \\ k_3+k_4=0 \end{cases} \quad (*)$$

$\because$

$$D=\begin{vmatrix} 1&0&0&1 \\ 1&1&0&0 \\ 0&1&1&0 \\ 0&0&1&1 \end{vmatrix}=0$$

$\therefore$ $(*)$ 有非零解. $\therefore \beta_1 \sim \beta_4$ 线性相关.

例3. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

问 α_4 可否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?

解: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 $\Rightarrow \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关 $\Rightarrow \alpha_4 = k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$.

$\alpha_4 = 0\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$.

例4. α_1, α_2 无关. β_1 可由 α_1, α_2 表示. β_2 不可由 α_1, α_2 表示.

① $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1+k\beta_2$? $\begin{cases} k=0 & 相关 \\ k\neq 0 & 无关 \end{cases}$

② $\alpha_1, \alpha_2, k\beta_1+\beta_2$? 无关.

三. 理论(二) — 向量组等价. 极大线性无关组, 向量组的秩.

(一) defs.

1. 向量组等价 — $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_m$; $B: \beta_1 \cdots \beta_n$

If
$$\begin{cases} \alpha_1 = k_{11}\beta_1 + \cdots + k_{1n}\beta_n \\ \cdots \\ \alpha_m = k_{m1}\beta_1 + \cdots + k_{mn}\beta_n \end{cases} \quad (1)$$

称 A 组可由 B 组线性表示.

If
$$\begin{cases} \beta_1 = l_{11}\alpha_1 + \cdots + l_{1m}\alpha_m \\ \cdots \\ \beta_n = l_{n1}\alpha_1 + \cdots + l_{nm}\alpha_m \end{cases} \quad (2)$$

B 组可由 A 组线性表示.

If (1), (2) 成立. 称 A 组与 B 组等价

No.　　Date :

2. 极大组 — 设 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$：

If ① ∃ r 个 向量 线性无关；

② ∀ r+1 个 向量 线性相关.

称 r 个 线性无关的向量 为极大组.

r 称为 该向量组的秩.

Note：

① 极大组不一定唯一.

如：$\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$　$\alpha_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

~~② $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 的~~

② $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 秩 $= n$

③ 极大组与向量组等价.

④ $A = \alpha_1, \cdots \alpha_n$; $\bar{A} = \alpha_1 \cdots \alpha_n, b$.

Case 1. A 组秩 $=$ $\bar{A}$ 组秩 $\Leftrightarrow$ b 可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性表示.

Case 2. $\bar{A}$ 组秩 $=$ A 组秩 +1 $\Leftrightarrow$ b 不可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性表示.

⑤ $A_{m\times n} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_m\end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$

$\alpha_1, \cdots \alpha_m$ — 行组. $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 的秩 — 行秩；

$\beta_1, \cdots \beta_n$ — 列组. $\beta_1 \cdots \beta_n$ 的秩 — 列秩.

☆ ⑥ $A_{m\times n}$, $B_{n\times s} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$

$AB = A(\beta_1, \cdots, \beta_s) = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_s)$.

☆ ⑦ ~~如~~ $B = (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3,\ 2\alpha_1 + \alpha_3,\ \alpha_2 - 4\alpha_3)$

令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$\therefore B = A\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\-1 & 0 & 1\\1 & 1 & -4\end{pmatrix}$

(二) 性质：

1. 矩阵三秩相等.

例1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$　$\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$　$\beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$，

问 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$?

No. Date :

证：令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ $r(A)=3$

$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=A\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

$\because \begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$ $\therefore \begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ 可逆

$\therefore r(B)=r(A)=3.$

$\therefore \beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关.

2. A：$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$；B：$\beta_1,\cdots\beta_n$. 若 A组可由B组线性表示.

则 A组秩 ≤ B组秩.

证：令 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ $B=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$.

$\because \begin{cases}\alpha_1=k_{11}\beta_1+\cdots+k_{1n}\beta_n\\ \cdots\\ \alpha_m=k_{m1}\beta_1+\cdots+k_{mn}\beta_n\end{cases}$

$\therefore A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=B\begin{pmatrix}k_{11}&&k_{m1}\\ \vdots&\cdots&\vdots\\ k_{1n}&&k_{mn}\end{pmatrix}=BK$

$\therefore r(A)=r(BK)\le r(B)$

3. 矩阵等价向量组秩等.

例2. $A_{m\times n}\neq 0$，$B_{n\times s}\neq 0$ 且 $AB=0$

(A) A行相关，B行相关.

(B) A列相关，B列相关

(C) A列相关，B行相关 ✓

(D) A行相关，B列相关.

$AB=0\Rightarrow r(A)+r(B)\le n.$

$A\neq 0,\ B\neq 0\Rightarrow r(A)\geq 1,\ r(B)\geq 1$

$\Rightarrow r(A)<n,\ r(B)<n$

No. Date :

例3. $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 为 n 个n维

证：$\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 无关 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ & \cdots & \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{vmatrix} \neq 0$

证 令 $A=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$.

$$A^TA = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1 \cdots \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ & \cdots & \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 无关 $\Leftrightarrow r(A)=n$.

$\Leftrightarrow r(A^TA)=n \Leftrightarrow |A^TA| \neq 0$

Notes:

1. $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \text{只有零解} \\ \text{有非零解} \end{cases}$

$\Updownarrow$

$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$ $\begin{cases} \alpha_1 \cdots \alpha_n \text{ 无关} \\ \alpha_1 \cdots \alpha_n \text{ 相关} \end{cases}$

$\Updownarrow$

$AX=0$.

$(A=(\alpha_1 \cdots \alpha_n))$ $\begin{cases} r(A)=n. \\ r(A)<n. \end{cases}$

2. $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ $\begin{cases} \text{有解} \\ \text{无解} \end{cases}$

$\Updownarrow$

$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = b$. $\begin{cases} b \text{ 可由 } \alpha_1 \cdots \alpha_n \text{ 线性表示} \\ b \text{ 不可由 } \alpha_1 \cdots \alpha_n \text{ 线性表示} \end{cases}$

$\Updownarrow$

$AX=b$

$\begin{pmatrix} A=(\alpha_1 \cdots \alpha_n), \\ \bar{A}=(\alpha_1 \cdots \alpha_n, b) \end{pmatrix}$ $\begin{cases} r(A)=r(\bar{A}) \\ r(\bar{A})=r(A)+1 \\ (r(A) \neq r(\bar{A})) \end{cases}$

第四章 方程组

一、结构. $A_{m\times n}$.

$$AX=0 \quad (*)$$
$$AX=b \quad (**)$$

1. $\xi_1,\cdots,\xi_s$ 为(*)解 $\Rightarrow$ $k_1\xi_1+\cdots+k_s\xi_s$ 为(*)解.

2. $\eta_1,\cdots,\eta_s$ 为(**)解

① $k_1\eta_1+\cdots+k_s\eta_s$ 为(*)解 $\Leftrightarrow$ $k_1+\cdots+k_s=0$.

② $k_1\eta_1+\cdots+k_s\eta_s$ 为(**)解 $\Leftrightarrow$ $k_1+\cdots+k_s=1$

二. 理论.

Th1. $A_{m\times n}$. 对(*):

①(*)只有零解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=n$.

②(*)有非零解 $\Leftrightarrow$ $r(A)<n$

Th2. $A_{m\times n}$. 对(**):

① (**)有解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(\bar{A})$ $\begin{cases} =n & \text{— 唯一解.} \\ <n. & \text{— 无数解.} \end{cases}$

② (**)无解 $\Leftrightarrow$ $r(A)\neq r(\bar{A})$

Th3. $A_{m\times n}$, $B_{n\times s}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$. 且 $AB=0$

则 $\beta_1,\cdots\beta_s$ 为 $AX=0$ 的解.

证: $AB=A(\beta_1,\cdots\beta_s)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots A\beta_s)$

$\because AB=0$ $\quad\therefore A\beta_1=0, A\beta_2=0,\cdots,A\beta_s=0$.

$\therefore$ $\beta_1\cdots\beta_s$ 为 $AX=0$ 的解.

三. 求解:

(一) $AX=0$

1. 求 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_4=0 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=0 \\ 3x_1+4x_2-x_3-3x_4=0 \end{cases}$ 解.

解. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

No. Date:

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

法一：同解方程组为 ~~x_1~~ $\begin{cases} x_1 = -x_3 + 5x_4 \\ x_2 = x_3 - 3x_4 \end{cases}$

通解 $X = \begin{pmatrix} -x_3+5x_4 \\ x_3-3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

法二：

通解 $X = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $\underline{AX=0}$

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 3 \\ & & 0 & & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 3 \\ & & 0 & & \end{pmatrix}$$

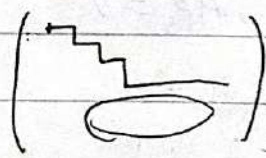
通解 $X = k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $AX=0$.

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ & & 0 & & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -13 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ & & 0 & & \end{pmatrix}$$

$X = k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(二) $\underline{AX=b}$

1°. $\bar{A} \longrightarrow$ 

2° $r(A) \overset{?}{=} r(\bar{A})$

If $r(A) = r(\bar{A})$

例1. $\underline{AX=b}$

$$\bar{A} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ & & 0 & & \end{pmatrix}$$

No. Date :

$r(A)=r(\bar{A})=2<4 \Rightarrow$ ~~无解~~ 无数解.

$$\bar{A} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

法一：同解方程组 $\begin{cases} x_1 = 2x_3 + x_4 + 7 \\ x_2 = -2x_3 - x_4 + 4 \end{cases}$

通解 $$X = \begin{pmatrix} 2x_3+x_4+7 \\ -2x_3-x_4+4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

法二：$$X = k_1\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

型一 结构与性质

1. $A_{4\times4}$. $r(A)=3$ A每行元素之和为0.
求$AX=0$通解.

解：1° $r(A)=3<4$.

2° ∵ $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

∴ $X = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $A_{4\times4}$, $r(A)<4$. $A_{21}\neq 0$ 求$AX=0$通解.

解：1° $r(A)<4 \Rightarrow r(A^*)=0$ 或 1.

∵ $A_{21}\neq 0$. ∴ $A^*\neq 0 \Rightarrow r(A^*)=1$.

∴ $r(A)=3<4$

2° ∵ $AA^* = |A|E = 0$

∴ A^*列为$AX=0$解.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \\ A_{12} & A_{22} & \cdots \\ A_{13} & A_{23} & \\ A_{14} & A_{24} & \end{pmatrix} \qquad \therefore X = k\begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{22} \\ A_{23} \\ A_{24} \end{pmatrix}$$

No. Date :

3. $A_{3\times3}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ & * & \\ & & \end{pmatrix}$ (a, b, c 不全为0).

$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$ 且 $AB=0$ 求 $AX=0$ 通解.

解: 1° $AB=0 \Rightarrow r(A)+r(B)\le 3$.

$\because A\neq 0$ $\therefore r(A)\geq 1$

2° ① $k\neq 9$ $r(B)=2 \Rightarrow r(A)=1<3$

$\because AB=0$ $\therefore X=C_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix}$;

② $k=9$. $r(B)=1 \Rightarrow 1\le r(A)\le 2$

Case1. $r(A)=2<3$

$\because AB=0$ $\therefore X=C\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

Case2 $r(A)=1<3$

设 $A\neq 0$. ~~A~~ $A\rightarrow\begin{pmatrix} a & b & c \\ & 0 & \\ & & \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ & 0 & \\ & & \end{pmatrix}$

$\therefore X=C_1\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix}$

~~例5~~ 5. $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. α_1, α_3 线性无关.

$\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_3$. $\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+4\alpha_3$. $b=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$.

求 $AX=b$ 通解.

解: 1° $r(A)=r(\bar{A})=2<4$

2° $AX=0 \Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=0$

$\because \begin{cases} 2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+0\alpha_4=0 \\ \alpha_1-\alpha_2+4\alpha_3-\alpha_4=0 \end{cases}$ ...

$\therefore AX=0$ 通解 $X=k_1\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\-1\end{pmatrix}$;

3° $AX=b \Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=b$.

$\because \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=b$

$\therefore AX=b$ 特解 $\eta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\therefore AX=b$ 通解.

型二 含参方程组讨论

例1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{pmatrix}$ 且 $AX=0$ 的基础解系含有两个线性无关的解向量，求 $AX=0$ 的通解.

1° 由 $4-r(A)=2 \Rightarrow r(A)=2$

2° $A\to\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\0&t-2&-1&-1\end{pmatrix}$

则 $\frac{1}{t-2}=\frac{t}{-1}=\frac{t}{-1} \Rightarrow t=1$.

3° $A\to\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore X=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$

2. 设方程组 $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ 讨论 a 的取值，使得方程组有唯一解、无解、有无穷多个解. 并当方程组有无穷多个解时求出其通解.

法一: $|A|=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-1&a\\0&a-2&-3\end{vmatrix}=3-a^2+2a$.

$=-(a^2-2a-3)=-(a+1)(a-3)$.

① $|A|\neq0$ 即 $A\neq-1$ 且 $A\neq3$ 唯一解.

$x_1=\frac{D_1}{|A|}$　$x_2=\frac{D_2}{|A|}$　$x_3=\frac{D_3}{|A|}$

② $a=-1$

$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&1&3\\1&-1&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&-1&1\\0&-3&-3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&-1&1\\0&0&0&-4\end{pmatrix}$

No. Date:

$\because r(A) \neq r(\bar{A})$ $\therefore$ 无解.

③ $a=3$.

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\because r(A)=r(\bar{A})=2<3$ $\therefore$ 无数解.

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = k\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

法二:

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & a-2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a+1)(a-3) & a-3 \end{pmatrix}$$

① $(a+1)(a-3)\neq 0$ 即 $a\neq -1$, $a\neq 3$.

$r(A)=r(\bar{A})=3$ 唯一解.

$$\bar{A} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}$$

② $(a+1)(a-3)=0$

case1 $\begin{cases} (a+1)(a-3)=0 \\ a-3\neq 0 \end{cases}$ 即 $a=-1$ $r(A)\neq r(\bar{A})$ 无解.

case2. $\begin{cases} (a+1)(a-3)=0 \\ a-3=0 \end{cases}$ 即 $a=3$. $r(A)=r(\bar{A})=2<3$

3、当 a. b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

有唯一解. 无解. 有无穷多解? 有解时，求出其解.

一:考研要求

2. $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\0&-1&-2&a-3&-1\end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&\underline{a-1}&0&b+1\\0&0&0&\underline{a-1}&0\end{pmatrix}$

① $a\neq1$ b任意. $r(A)=r(\overline{A})=4$ 唯一解.

$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&1&0&\frac{b+1}{a-1}\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&?\\0&1&0&0&?\\0&0&1&0&\frac{b+1}{a-1}\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$

② $a=1$

Case1. $b\neq-1$ $r(A)\neq r(\overline{A})$ 无解.

Case2. $b=-1$ $r(A)=r(\overline{A})=2<4$ 无数解.

$\overline{A}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\&&0&&\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\&&0&&\end{pmatrix}$

$$X=k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

第五章 特征值和特征向量

背景: 二次型.

1. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+4x_3^2=X^TAX$ 标准二次型.

$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$X^TAX=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(2x_1,-x_2,4x_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$=2x_1^2-x_2^2+4x_3^2$

2. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2+2x_1x_2+4x_1x_3=X^TAX$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-3&0\\2&0&0\end{pmatrix}\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\quad X^TAX$$

$$f=X^TAX\begin{cases}\text{标准}\Leftrightarrow A=\begin{pmatrix}\ddots\end{pmatrix}\\ \text{非标准}\Leftrightarrow A\text{非对角阵.}\end{cases}$$

第五章 特征值与特征向量.

一、defs.

1、特征值与特征向量 — $A_{n\times n}$

If $\exists\lambda$(数). $\exists\alpha\neq0$(向量) 使.

$A\alpha=\lambda\alpha$ — 特征向量.

特征值

Q_1. $\lambda=?$

Q_2. If λ_0为特征值. α!

设 $A\alpha=\lambda\alpha\Leftrightarrow(\lambda E-A)\alpha=0$

$\because\alpha\neq0\quad\therefore(\lambda E-A)X=0$ 有非零解.

$\Rightarrow r(\lambda E-A)<n\Leftrightarrow|\lambda E-A|=0$

2. 特征方程 — $|\lambda E-A|=0$ 称为A的特征方程.

$$|\lambda E-A|=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\cdots&&&\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&\lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+*=0$$

Notes:

① λ不一定实.

如: $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1\\-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda=\pm i$$

② $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn} \triangleq \text{迹 } tr(A)\\ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|\end{cases}$$

③ $r(A)=n \Leftrightarrow \lambda_1\neq0, \lambda_2\neq0, \cdots, \lambda_n\neq0$.

$r(A)<n \Leftrightarrow \exists\lambda=0$.

④ 若λ_0为特征值, λ_0的特征向量即

$(\lambda_0 E-A)X=0$ 非零解.

例1. $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$

解: ① $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda+1&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-1 \quad \lambda_3=5$

② $\lambda=-1$ 代入 $(\lambda E-A)X=0$

$E+A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\&0&\end{pmatrix}$.

$\lambda=-1$对应的线性无关特征向量. $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=5$ 代入 $(\lambda E-A)X=0$.

~~解 A~~ $5E-A=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&3&-3\\0&3&-3\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

No. Date :

$\lambda=5$ 对应的线性无关特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

例2. $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

解: ① $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-2\\0&\lambda&-1\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-2)=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=2$

② $\lambda=0$ 代入 $(\lambda E-A)X=0$:

$A\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\lambda=0$ 对应线性无关特征向量: $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\lambda=2$ 代入 $(\lambda E-A)X=0$

$2E-A\longrightarrow\begin{pmatrix}2&-1&-2\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-\frac{5}{4}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\lambda=2$ 对应线性无关特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$

3. 矩阵相似 — A, B 为 n 阶阵. 若 $\exists$ 可逆阵 P.

使 $P^{-1}AP=B$. 称 $A\sim B$.

Notes:

① $\begin{cases}A\sim A\\A\sim B\Rightarrow B\sim A\\A\sim B,\ B\sim C\Rightarrow A\sim C\end{cases}$ ✓

证: $A\sim B\Rightarrow P_1^{-1}AP_1=B$;

$B\sim C\Rightarrow P_2^{-1}BP_2=C$.

$\Rightarrow P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2=C$

$\Rightarrow(P_1P_2)^{-1}A(P_1P_2)=C$

令 $P_1P_2=P$. 则 $P^{-1}AP=C$. 即 $A\sim C$.

② $A\sim B$. 则 $r(A)=r(B)$，反之不对.

证：$A\sim B \Rightarrow P^{-1}AP=B$

$\Rightarrow r(A)=r(B)$

③ $A\sim B \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} |\lambda E-A|=|\lambda E-B|$

证："$\Rightarrow$" $A\sim B \Rightarrow P^{-1}AP=B$

$|\lambda E-B|=|\lambda P^{-1}P-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda E-A)P|$

$=|P^{-1}|\cdot|\lambda E-A|\cdot|P|=|\lambda E-A|$

"$\Leftarrow$" $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

$|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda-2)=|\lambda E-B|=\lambda^2(\lambda-2)$

但 $A\not\sim B$. $\because r(A)=1\neq r(B)=2$.

④ $A\sim B$，则 $\begin{cases}A^T\sim B^T\\ f(A)\sim f(B)\end{cases}$.

若 A、B 可逆，则 $\begin{cases}A^{-1}\sim B^{-1}\\ A^*\sim B^*\end{cases}$

⑤ $A\sim B \Rightarrow \begin{cases}tr(A)=tr(B)\\ |A|=|B|\end{cases}$

二 性质：

Note：$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ &\cdots& \\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$

If $\forall a_{ij}=a_{ji}$ 或 $A^T=A$ 称 A 为实对称矩阵.

(一) 一般性质：

1. $A_{n\times n}$，$\lambda_1\neq\lambda_2$

$(\lambda_1E-A)X=0 \Rightarrow \xi_1,\cdots,\xi_s$

$(\lambda_2E-A)X=0 \Rightarrow \eta_1,\cdots,\eta_t$

则 $\xi_1,\cdots\xi_s,\eta_1,\cdots,\eta_t$ 线性无关.

No. Date :

证: $A\xi_1=\lambda_1\xi_1, \cdots, A\xi_s=\lambda_1\xi_s$

$A\eta_1=\lambda_2\eta_1, \cdots A\eta_t=\lambda_t\eta_t.$

令 $(k_1\xi_1+\cdots+k_s\xi_s)+(l_1\eta_1+\cdots+l_t\eta_t)=0$ (*).

(*) 左乘A

$\lambda_1(k_1\xi_1+\cdots+k_s\xi_s)+\lambda_2(l_1\eta_1+\cdots l_t\eta_t)=0.$ (**)

(*) $\times\lambda_2$ − (**)

$(\lambda_2-\lambda_1)(k_1\xi_1+\cdots+k_s\xi_s)=0$

$\because \lambda_1\neq\lambda_2$

$\therefore k_1\xi_1+\cdots+k_s\xi_s=0$

$l_1\eta_1+\cdots+l_t\eta_t=0$

$\therefore k_1=\cdots=k_s=0,\ l_1=\cdots=l_t=0$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$$

① $|\lambda E-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-1\quad \lambda_3=5$

② $\lambda=-1$ 代入 $(\lambda E-A)X=0 \Rightarrow \alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$;

$\lambda=5$ 代入 $(\lambda E-A)X=0 \Rightarrow \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

③ $A\alpha_1=-\alpha_1,\quad A\alpha_2=-\alpha_2\quad A\alpha_3=5\alpha_3$

$(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3)=(-\alpha_1, -\alpha_2, 5\alpha_3).$

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ P可逆.

则 $AP=P\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&5\end{pmatrix}$

$\Rightarrow P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&5\end{pmatrix}$

一、defs.

1. $A_{n\times n}$. If $\exists \lambda$, $\alpha \neq 0$, 使,
$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

2. $|\lambda E - A| = 0$

3. B、B 为 $n\times n$. If $\exists P$ (可逆) 使 $P^{-1}AP = B$. 称 $A \sim B$

Notes:

① λ_0 的特征向量: $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 非零解.

② $|\lambda E - A| = 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdots \lambda_n$.
$$\begin{cases} \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = tr(A) \\ \lambda_1 \cdots \lambda_n = |A| \end{cases}$$

③ $A \sim B \Rightarrow r(A) = r(B)$

④ $A \sim B \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} |\lambda E - A| = |\lambda E - B| \Rightarrow \begin{cases} tr(A) = tr(B) \\ |A| = |B| \end{cases}$

⑤ $A \sim B$ 且可逆 $\Rightarrow \begin{cases} A^{-1} \sim B^{-1} \\ A^* \sim B^* \end{cases}$

二、性质

(一) 一般:

1. $A_{n\times n}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
$$\left.\begin{array}{l} (\lambda_1 E - A)X = 0 \Rightarrow \xi_1, \cdots, \xi_s. \\ (\lambda_2 E - A)X = 0 \Rightarrow \eta_1, \cdots, \eta_t. \end{array}\right\} \Rightarrow \xi_1, \cdots, \xi_s, \eta_1, \cdots, \eta_t \text{ 线性无关.}$$

2. $A\alpha = \lambda_0 \alpha$ $(\alpha \neq 0)$.

① $f(A)\alpha = f(\lambda_0)\alpha$.

如: $A\alpha = 4\alpha$.

$f(x) = x^2 - x + 2$ $f(A) = A^2 - A + 2E$.

$f(A)\alpha = (A^2 - A + 2E)\alpha = A^2\alpha - A\alpha + 2\alpha = (4^2 - 4 + 2)\alpha$
$= f(4)\alpha$

☆ ② 若A可逆, 则 $\begin{cases} A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda_0}\alpha. \\ A^*\alpha = \frac{|A|}{\lambda_0}\alpha. \end{cases}$

proof of ②

$\because A$ 可逆 $\therefore \lambda_0 \neq 0$

$A\alpha = \lambda_0 \alpha \Rightarrow A^{-1}A\alpha = A^{-1}\lambda_0\alpha \Rightarrow \alpha = \lambda_0 A^{-1}\alpha$

$\Rightarrow A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda_0}\alpha$.

$A^*\alpha = |A|A^{-1}\alpha = \frac{|A|}{\lambda_0}\alpha$.

Note：A可逆时，A、A^{-1}、A^* 特征向量同.

3. $A_{n\times n}$ 可对角化（可相似对角化）$\Leftrightarrow \exists n$ 个线性无关的特征向量

(二) $A^T = A$：实对称

1. 若 $A^T = A$，则 $\lambda_1 \in R$, $\lambda_2 \in R$, $\cdots$, $\lambda_n \in R$

2. 若 $A^T = A$，且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. $A\alpha = \lambda_1\alpha$, $A\beta = \lambda_2\beta$

则 $\alpha \perp \beta$.

证：$A\alpha = \lambda_1\alpha \Rightarrow \alpha^T A^T = \lambda_1 \alpha^T$

$\Rightarrow \alpha^T A = \lambda_1\alpha^T \Rightarrow \alpha^T A\beta = \lambda_1\alpha^T\beta$

$\Rightarrow \lambda_2\alpha^T\beta = \lambda_1\alpha^T\beta \Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)\alpha^T\beta = 0$

$\because \lambda_1 \neq \lambda_2$

$\therefore \alpha^T\beta = 0$. 即 $\alpha \perp \beta$.

3. 设 $A^T = A$. 则 A一定可对角化.

三. 矩阵相似对角化过程.

(一) $A^T \neq A$

1° $|\lambda E - A| = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$;

2° $(\lambda_i E - A)X = 0 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$. $\begin{cases} \text{线性无关} \\ m \leq n \end{cases}$

3° ① $m < n \Rightarrow$ A不可对角化.

② $m = n \Rightarrow$ A可对角化.

$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1$, $A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$, $\cdots$. $A\alpha_n = \lambda_n\alpha_n$.

$(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \cdots, \lambda_n\alpha_n)$

$$A(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

令 $P=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，可逆.

$$AP = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

附：正交.

一、向量正交.

1. def — If $(\alpha,\beta)=0$. 称 $\alpha\perp\beta$.

2. 性质：

$\alpha_1\cdots\alpha_n$ 非零、两两正交 $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ $\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 线性无关

3. 正交化：

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

1° 正交化.

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$\cdots$$

$$\beta_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\cdots-\frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1}$$

$\Rightarrow \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 两两正交.

2° 规范化.

$\gamma_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1$，$\gamma_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2$，$\cdots$ $\gamma_n=\frac{1}{|\beta_n|}\beta_n$.

$\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 两两正交且规范.

二. 正交矩阵

1. def — $A_{n\times n}$. If $A^TA=E$ 称 A 为正交阵.

Note: $A^TA=E \Leftrightarrow A^{-1}=A^T$

2. 等价条件：

Th. $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots\gamma_n)$ 则.

$Q^TQ=E \Leftrightarrow \gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 两两正交且规范.

(二) $A^T=A$:

1° $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \lambda_1,\cdots,\lambda_n$;

2° $(\lambda_i E-A)X=0 \Rightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_n$. $\begin{cases}\text{线性无关}\\ \text{不同特征值之间:正交}\end{cases}$

3° Case1. 找可逆阵 P.

令. $P=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix};$$

Case2. 找正交阵 Q:

例. $\cancel{A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}}$　　$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

① 找可逆阵 P, $P^{-1}AP$为对角阵

② 找正交阵 Q, Q^TAQ为对角阵.

解: ① $|\lambda E-A| = \begin{vmatrix}\lambda-1&1&0\\1&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)^2$

$\Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3=2.$

② $\lambda=0$ 代入 $(\lambda E-A)X=0$

$A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$　　$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$;

$\lambda=2$. 代入 $(\lambda E-A)X=0$

$2E-A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.　$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$　$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

③ Case1. 求可逆阵 P:

$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$

Case 2. 找正交阵.

$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\gamma_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

令 $Q = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $Q^TQ = E$ 且 $Q^TAQ = \begin{pmatrix}0 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$

型一. 性质.

1、A、B为4阶阵，$A\sim B$，A特征值 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$.

求 $|B^{-1}-E|$.

解：1° A^{-1}特征值 2, 3, 4, 5.

2° $A\sim B \Rightarrow A^{-1}\sim B^{-1}$

3° B^{-1}特征值, 2, 3, 4, 5.

4° $B^{-1}-E$ 特征值. 1、2、3、4.

5° $|B^{-1}-E| = 24$.

2、设 $\alpha = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ 为矩阵 $A = \begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 6 & x & -6\\ y & -9 & 13\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量，求 x, y 及

A^{-1} 的特征值 μ.

解：$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 6 & x & -6\\ y & -9 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases}4 = \lambda\\ x-6 = \lambda\\ y+17 = 2\lambda\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda = 4\\ x = 10\\ y = -9\end{cases}$ $\mu = \frac{1}{4}$

3、设 $A = \begin{pmatrix}a & -1 & c\\ 5 & b & 3\\ 1-c & 0 & -a\end{pmatrix}$, $|A| = -1$, $\alpha = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 为 A^* 的特征向量，求 A^*

的特征值及 a, b, c 和 A 所对应的特征值 μ.

解：$A\alpha = \mu\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix}a & -1 & c\\ 5 & b & 3\\ 1-c & 0 & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases}-a+1+c = -\mu\\ -2-b = -\mu\\ c-1-a = \mu\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = c\\ \mu = -1\\ b = -3\end{cases}$

$$\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix} = -1$$

型二、λ求法

① 公式法：$|\lambda E - A| = 0$

② 定义法：$AX = \lambda X \quad (X \neq 0)$　　$f(A)$ 或 $AB=C$.

例1. $A_{3\times3}$　A每行元素之和为2

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 2 \quad \alpha = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

例2、$A_{3\times3}$. A每行元素之和为2.　$\cancel{A\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}$　$A\begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\-2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

求A.

解：1° $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;

2° $\cancel{A\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}$　$A\begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\-2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$A\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_2 = -2,\ \alpha_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_3 = 0,\ \alpha_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

3° $P = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 可逆.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A = P\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$$

例3. $A_{n\times n}$. 由 $A^2 - A - 6E = 0$ 求λ.

解 令 $AX = \lambda X$

$$(A^2 - A - 6E)X = (\lambda^2 - \lambda - 6)X = \theta.$$

$\because X\neq 0 \quad \therefore \lambda^2-\lambda-6=0 \Rightarrow \lambda=-2$ 或 $\lambda=3$.

③ 关联法：$\begin{cases} A、A^{-1}、A^* \\ P^{-1}AP=B \quad 即 A\sim B \end{cases}$

例1. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为3个3维向量且线性无关，$A_{3\times3}$.

$A\alpha_1=\alpha_1-\alpha_2,\quad A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2,\quad A\alpha_3=\alpha_1-2\alpha_2+6\alpha_3.$

解：$(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-2\alpha_2+6\alpha_3)$

$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&-2\\0&0&6\end{pmatrix}$

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆

$AP=P\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&-2\\0&0&6\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&-2\\0&0&6\end{pmatrix}\triangleq B$. 即 $A\sim B$.

型三. 矩阵对角化判断

1°. $A^T\overset{?}{=}A$

If $A^T=A$ 可对角化

2° ~~$A^T=$~~ If $A^T\neq A \Rightarrow \lambda_1,\cdots,\lambda_n$.

$\begin{cases}① \lambda_1,\cdots,\lambda_n 单值，\Rightarrow A可对角化. \\ ② 任意特征值重数与其无关特征向量个数一致 \\ ③ \exists n个线性无关特征向量\end{cases}$

例1. 设 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，且 $ad-bc<0$. 证明：A可相似对角化.

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-b\\-c&\lambda-d\end{vmatrix}=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$ $\quad \lambda_1\lambda_2=常数项$

$\because \lambda_1\lambda_2=ad-bc<0 \quad \therefore \lambda_1\neq\lambda_2 \quad \therefore A$ 可对角化.

2. $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ 单位且正交. $A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$

① 验证：$\alpha+\beta$、$\alpha-\beta$ 为A特征向量.

② 证：A可对角化

No. Date :

证：① $A(\alpha+\beta)=(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T)(\alpha+\beta)=\alpha+\beta$

$\Rightarrow \alpha+\beta$ 为 A 的属于 $\lambda_1=1$ 的特征向量

$A(\alpha-\beta)=(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T)(\alpha-\beta)=-\alpha+\beta=-(\alpha-\beta)$

$\Leftrightarrow \alpha-\beta$ 为 A 的属于 $\lambda_2=-1$ 的特征向量

② 法一：

$\because A^T=(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T)^T=(\alpha\beta^T)^T+(\beta\alpha^T)^T=\beta\alpha^T+\alpha\beta^T=A$

$\therefore$ A 可对角化.

法二： $r(A)\le r(\alpha\beta^T)+r(\beta\alpha^T)\le r(\alpha)+r(\beta)=2<3$

$\Rightarrow |A|=0$

$\because |A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad \therefore \lambda_3=0$

$\because \lambda_1=1,\ \lambda_2=-1\quad \lambda_3=0$ 两两不等

$\therefore$ A 可对角化

3. 设 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵，求常数 a，并求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

1° $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&-a\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-6)^2=0$

$\Rightarrow \lambda_1=-2,\quad \lambda_2=\lambda_3=6.$

2° $\because$ A 可对角化 $\quad\therefore r(6E-A)=1$

$6E-A=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&-a\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&-a\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\therefore a=0.$

3° $\lambda=-2$ 代入 $(\lambda E-A)X=0$

$2E+A=\begin{pmatrix}4&2&0\\8&4&0\\0&0&8\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$

$\lambda=6$ 代入 $(\lambda E-A)=0$

$6E-A=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\&0&\end{pmatrix}\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

4° $P=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&&\\&6&\\&&6\end{pmatrix}$

4. 设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，求x, y 所满足的条件.

解：1° $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-x&\lambda-1&-y\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)A_{22}=(\lambda-1)M_{22}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$

$\Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=1$

2° ∵ A 可对角化 ∴ $r(E-A)=1$

而 $E-A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-x&0&-y\\-1&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&-x-y\\0&0&0\end{pmatrix}$

∴ $x+y=0$.

5. $A\neq 0$ $A^k=0$ 证：A不可对角化.

证：令 $AX=\lambda X \Rightarrow A^kX=\lambda^kX=0$

∵ $X\neq 0$ ∴ $\lambda^k=0 \Rightarrow$ ~~A=0~~ $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$.

∴ ∵ $r(0E-A)=r(A)\geq 1$

∴ $\lambda=0$ 对应的线性无关特征向量最多 n-1 个

∴ A不可对角化.

第六章 二次型

一、defs.

1. 二次型 — $f=X^TAX$ $\begin{cases}\text{标} \Leftrightarrow A=\begin{pmatrix}\ddots\end{pmatrix}\\ \text{非标} \Leftrightarrow A^T=A \text{ 但不对角}.\end{cases}$

2. 矩阵合同 — A, B 为 n 阶阵，若 ∃ 可逆阵 P，使 $P^TAP=B$. 称 A, B 合同. 记 $A\cong B$.

3. 标准化 — $f=X^TAX \xrightarrow[(P\text{可逆})]{X=PY} Y^T(P^TAP)Y$

If $P^TAP=\begin{pmatrix}l_1&&\\&\ddots&\\&&l_n\end{pmatrix}$ 则 $f=l_1y_1^2+l_2y_2^2+\cdots+l_ny_n^2$

Note：标准化底线.

① $X=PY$，P可逆.

② P^TAP为对角阵

二．二次型标准化.

(一) 配方法

1. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_2x_3-5x_3^2$，用配方法化二次型为标准型

解：1° $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&2\\0&2&-5\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$. $f=X^TAX$

2° $f=(x_1+x_2)^2-x_2^2+4x_2x_3-5x_3^2$

$=(x_1+x_2)^2-(x_2-2x_3)^2-x_3^2$

3° 令 $\begin{cases}x_1+x_2=y_1\\x_2-2x_3=y_2\\x_3=y_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=y_1-y_2-2y_3\\x_2=y_2+2y_3\\x_3=y_3\end{cases}$

即 $X=PY$. $P=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ 可逆

4° $f=X^TAX\xlongequal{X=PY}Y^T(P^TAP)Y=y_1^2-y_2^2-y_3^2$

2. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3-5x_3^2$ —

解：1° $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&0\\-1&0&-5\end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ $f=X^TAX$

2° $f=(x_1+x_2-x_3)^2-x_2^2+2x_2x_3-x_3^2-5x_3^2$

$=(x_1+x_2-x_3)^2-(x_2-x_3)^2-5x_3^2$

3° 令 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=y_1\\x_2-x_3=y_2\\x_3=y_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=y_1-y_2\\x_2=y_2+y_3\\x_3=y_3\end{cases}$

即 $X=PY$ $P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 可逆.

4° $f=X^TAX\xlongequal{X=PY}Y^T(P^TAP)Y=y_1^2-y_2^2-5y_3^2$

Notes:

① 配方法标准型不唯一. 标准型系数不一定为A的特征值.

② 标准型不唯一. 但标准型中系数正负个数一定

(二)正交变换法.

1° $f = X^TAX$; $(A^T = A)$

2° $|\lambda E - A| = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$;

3° $(\lambda_i E - A)X = 0 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$;

4° $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \xrightarrow[\text{规范化}]{\text{正交化}} \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$.

$(A\gamma_1 = \lambda_1\gamma_1, A\gamma_2 = \lambda_2\gamma_2, \cdots, A\gamma_n = \lambda_n\gamma_n)$

5° $(A\gamma_1, \cdots, A\gamma_n) = (\lambda_1\gamma_1, \cdots, \lambda_n\gamma_n)$.

$$A(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

令 $Q = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$ $Q^TQ = E$. $Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

6° $f = X^TAX \xlongequal{X = QY} Y^T(Q^TAQ)Y$

$= \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

例3. $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$. 用正交变换法 —

解: 1° 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $f = X^TAX$

2° $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & -2 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}$

$= (\lambda - 4)(\lambda + 2)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4$.

3° $\lambda = -2$ 代入 $(\lambda E - A)X = 0$.

$2E + A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 0 & \\ & & \end{pmatrix}$, $\therefore$ $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\lambda = 4$ 代入 $(\lambda E - A)X = 0$

$4E - A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

No. Date :

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4° 令 $\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\beta_3 = \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(A\gamma_1 = -2\gamma_1, \ A\gamma_2 = -2\gamma_2, \ A\gamma_3 = 4\gamma_3)$

5° 令 $Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

$Q^T Q = E. \quad Q^T A Q = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$

6° $f = X^T A X \xlongequal{X = QY} Y^T (Q^T A Q) Y = -2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2$

Note:

正交变换法. 二次型标准型唯一. 系数即特征值.

三. 正定二次型.

例 1. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 = X^T A X$.

$\begin{cases} X^T A X \geq 0 \\ X^T A X = 0 \Leftrightarrow X = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall X \neq 0$, 有 $X^T A X > 0$

2. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 = X^T A X$

$= (x_1 + x_2)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2$

$\begin{cases} X^T A X \geq 0 \\ X^T A X = 0 \Leftrightarrow X = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \forall X \neq 0$, 有 $X^T A X > 0$.

(一) def — 设 $f = X^T A X$. 若 $\forall X \neq 0$ 有 $X^T A X > 0$

称 $X^T A X$ 为正定二次型. A 称为正定矩阵.

(二) 判断:

方法一: 定义法. If $\forall X \neq 0$: 有 $X^T A X > 0$

1、A、B正定 证：A+B正定.

证：$A^T=A$，$B^T=B$.

$\because (A+B)^T = A^T+B^T = A+B$.

$\forall X\neq 0$. $X^T(A+B)X = X^TAX+X^TBX$.

$\because X\neq 0$且A,B正定.

$\therefore X^TAX>0$，$X^TBX>0$ $\therefore X^T(A+B)X>0$.

$\therefore$ A+B正定.

2、$A_{m\times n}$、$r(A)=n$ $B=A^TA$. 证：B正定.

证：$B^T=(A^TA)^T=A^TA=B$.

$\forall X\neq 0$. $X^TBX = X^TA^TAX = (AX)^TAX$

令$AX=\alpha$. $X^TBX=\alpha^T\alpha = |\alpha|^2$

$\alpha\neq 0$

若$\alpha=0 \Rightarrow AX=0$

$\because r(A)=n$. $\therefore X=0$ 矛盾.

$\therefore \alpha\neq 0$ $\therefore X^TBX=|\alpha|^2>0$

$\therefore$ B为正定矩阵.

方法二：特征值法.

Th. $A_{n\times n}$，$A^T=A$，则A正定$\Leftrightarrow \lambda_1>0,\cdots,\lambda_n>0$.

1. A正定. 证：A^{-1}正定.

证：$A^T=A$

$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$

$\because$ A正定. $\therefore \lambda_1>0,\lambda_2>0,\cdots,\lambda_n>0$.

$\therefore A^{-1}$特征值. $\frac{1}{\lambda_1}>0,\frac{1}{\lambda_2}>0,\cdots,\frac{1}{\lambda_n}>0$.

$\therefore A^{-1}$正定

2. $A_{n\times n}$正定，证：$|E+A|>1$.

证：$\because$ A正定 $\therefore \lambda_1>0,\lambda_2>0,\cdots,\lambda_n>0$.

又$\because$ E+A特征值. $1+\lambda_1,1+\lambda_2,\cdots,1+\lambda_n$.

$\therefore |E+A|=(1+\lambda_1)\cdots(1+\lambda_n)>1$.

3、$A_{3\times3}$. $A^T=A$. $A^2+3A=0$. 若 $A+kE$ 正定. 求 k 范围.

解: 1° 令 $AX=\lambda X$

$(A^2+3A)X=(\lambda^2+3\lambda)X=0$.

∵ $X\neq 0$. ∴ $\lambda^2+3\lambda=0$

∴ $\lambda=0$ 或 $\lambda=-3$.

2° $A+kE$ 特征值为 $\lambda=k$ 或 $\lambda=k-3$.

∵ $A+kE$ 正定.

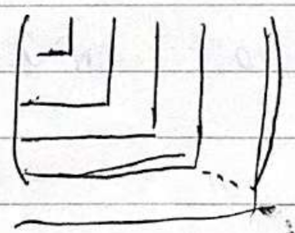
∴ $\begin{cases} k>0 \\ k-3>0 \end{cases}$ ∴ $k>3$.

Note: A 正定 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $r(A)=n$

方法三: 顺序主子式法.

Th. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $A^T=A$

则 A 正定 $\Leftrightarrow$ $a_{11}>0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0$, …, $|A|>0$.

$A=$ 

明图.

正交矩阵.

一、def — Q 为 $n\times n$. If $Q^TQ=E$.

二、等价条件:

Th. $Q_{n\times n}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$ 则.

$Q^TQ=E \Leftrightarrow \gamma_1,\gamma_2,\cdots \gamma_n$ 两两正交且规范

证：$Q^TQ=\begin{pmatrix}\gamma_1^T\\ \gamma_2^T\\ \vdots\\ \gamma_n^T\end{pmatrix}(\gamma_1,\gamma_2\cdots\gamma_n)=\begin{pmatrix}\gamma_1^T\gamma_1 & \gamma_1^T\gamma_2 & \cdots & \gamma_1^T\gamma_n\\ \gamma_2^T\gamma_1 & \gamma_2^T\gamma_2 & \cdots & \gamma_2^T\gamma_n\\ \cdots\\ \gamma_n^T\gamma_1 & \gamma_n^T\gamma_2 & \cdots & \gamma_n^T\gamma_n\end{pmatrix}=E$.

$\Longleftrightarrow\begin{cases}\gamma_1^T\gamma_1=\gamma_2^T\gamma_2=\gamma_n^T\gamma_n=1\\ \gamma_i^T\gamma_j=0\ (i\neq j)\end{cases}$ 即 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 两两正交且规范.

三. 正交矩阵性质：

1、$Q^TQ=E\Rightarrow Q^{-1}=Q^T$

2、$Q^TQ=E\Rightarrow|Q|=\pm1$

证：$Q^TQ=E\Rightarrow|Q^T|\cdot|Q|=1\Rightarrow|Q|^2=1\Rightarrow|Q|=\pm1$.

例1. $A_{n\times n}$ $A^TA=E$，$|A|<0$，求$|E+A|$？

解：$\because A^TA=E$，$\therefore|A|=\pm1$

又$\because|A|<0$，$\therefore|A|=-1$

$|E+A|=|A^TA+A|=|(A^T+E^T)A|$.

$=-|(E+A)^T|=-|E+A|$.

$\therefore|E+A|=0$.

3、$A^TA=E\Rightarrow\lambda=\pm1$.

证：令$AX=\lambda X\Rightarrow X^TA^T=\lambda X^T$

$\Rightarrow X^TA^T\cdot AX=\lambda X^TAX$

$X^TX=\lambda^2X^TX$

$\Rightarrow(\lambda^2-1)X^TX=0$

$\because$ $\cancel{X^T=X=|X|^2}$ $X^TX=|X|^2>0$

$\therefore\lambda^2-1=0\Rightarrow\lambda=\pm1$.

例. $A_{n\times n}$. $A^TA=E$. $|A|<0$. 求$|E+A|$？

解：$A^TA=E\Rightarrow\lambda=\pm1$

$\because|A|<0$，$\therefore\lambda=-1$ 一定为A特征值.

$\therefore E+A$ 一定有 $\lambda=0$. $\therefore|E+A|=0$.

No. Date :

第一章 行列式

一、defs

1. 逆序，逆序数 — $i,j\in N$，$i>j$，(i,j) — 逆序

$\tau(516342)=4+3+1+1=9$.

2. 行列式 ： $D\triangleq\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$

如 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x-1 & 3 & 2 \\ -1 & x+1 & 2x \\ 4 & x-2 & 2x+2\end{vmatrix}$ x^2系数 ______

$2x-1$ — $x+1$ — $2x+2$. $+2(2x-1)(x+1)^2$

— $2x$ — $x-2$ $-(2x-1)\cdot 2x(x-2)$

3 — -1 — $2x+2$ x

— $2x$ — 4 y

2 — -1 — $x-2$ y

— $x+1$ — 4 x

3. $\left(D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\right)$ $A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$

1° $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$

2° $\forall a_{ij}\Rightarrow M_{ij}\Rightarrow A_{ij}\triangleq(-1)^{i+j}M_{ij}$

3° $A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & & A_{n1} \\ A_{12} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & & A_{nn}\end{pmatrix}$

Note: $A\cdot A^*=A^*\cdot A=|A|E$.

二. 特殊行列式

1. $\begin{vmatrix} & & a_1 \\ & a_2 & \\ a_n & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$

2. $V(a_1, \cdots a_n) \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & & & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j)$

Note: $V(a_1, \cdots a_n) \neq 0 \Leftrightarrow a_1, \cdots, a_n$ 两两不等

3. $A_{m\times m}$, $B_{n\times n}$.

$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| \cdot |B|$

三. 行列式计算.

(一) 上下三角化

如: $D = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & a_1+c_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & a_2+c_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & a_3+c_3 \end{vmatrix}$

$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 23$

(二) 降阶

1. $\begin{cases} a_{i1} A_{i1} + \cdots + a_{in} A_{in} = |A| \\ a_{1j} A_{1j} + \cdots + a_{nj} A_{nj} = |A| \end{cases}$

2. $a_{i1} A_{j1} + \cdots + a_{in} A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$

例1. $D = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & -1 & 0 \\ 0 & a^2 & a & -1 \\ x & x^2 & x^3 & x^4 \end{vmatrix} = ?$

解: $D = aA_{11} + (-1)A_{12} = aM_{11} + M_{12}$

$= a\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ a^2 & a & -1 \\ x^2 & x^3 & x^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 \\ x & x^3 & x^4 \end{vmatrix}$

$= a[aA_{11} + (-1)A_{12}] + a^2 A_{11} + (-1)A_{12}$

$= a^2 M_{11} + aM_{12} + a^2 M_{11} + M_{12}$

$= a^2(ax^4 + x^3) + a(a^2x^4 + x^2) + a^2(ax^4 + x^3) + x$

例2. $D=\begin{vmatrix}1&2&-1&4\\2&1&3&5\\3&-4&7&6\\2&1&-1&5\end{vmatrix}$ $M_{31}+M_{32}+M_{33}=?$

解: $M_{31}+M_{32}+M_{33}=1\times A_{31}+(-1)A_{32}+1\times A_{33}+0\,A_{34}$

$$=\begin{vmatrix}1&2&-1&4\\2&1&3&5\\1&-1&1&0\\2&1&-1&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&-2&4\\2&3&1&5\\1&0&0&0\\2&3&-3&5\end{vmatrix}=M_{31}=\begin{vmatrix}3&-2&4\\3&1&5\\3&-3&5\end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix}1&-2&4\\1&1&5\\1&-3&5\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&-2&4\\0&3&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=12$$

Notes: 行列式问题中, 见 A_{ij}, A^*.

① $|A^*|=|A|^{n-1}$

② $a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{in}A_{in}=|A|$

证①: $r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n\\ 1, & r(A)=n-1\\ 0 & r(A)<n-1\end{cases}$

当 $r(A)=n$ 时, $|A|\neq 0$

由 $AA^*=|A|E \Rightarrow |A|\cdot|A^*|=|A|^n$

$\because |A|\neq 0$, $\therefore |A^*|=|A|^{n-1}$

当 $r(A)<n$ 时, $|A|=0$

$\because r(A^*)<n$ $\therefore |A^*|=0$

$\therefore |A^*|=|A|^{n-1}$

例1. $A_{3\times 3}=\begin{pmatrix}a&a&a\\&*&\\&&\end{pmatrix}$ $(a>0)$. $A_{ij}=a_{ij}$ $a=?$

解: $A^*=A^T$

$|A^*|=|A^T| \Rightarrow |A|^2=|A| \Rightarrow |A|=0$ 或 $|A|=1$.

$|A|=a^2+a^2+a^2=3a^2>0$

$\therefore 3a^2=1 \Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt{3}}$

例2. $A_{3\times3}$, $a_{11}\neq 0$ $A_{ij}+2a_{ij}=0$. $|A|=?$

解: $A_{ij}=-2a_{ij}$

$A^*=-2A^T \Rightarrow |A^*|=|-2A^T| \Rightarrow |A|^2=-8|A| \Rightarrow |A|=0$ 或 $|A|=-8$

$|A|=-2(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2)<0$ $\therefore |A|=-8$

用性质:

1. $x^3+px+q=0 \Rightarrow \alpha,\beta,\gamma$

$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}=?$ 解: $\because \alpha+\beta+\gamma=0$

$\therefore D=0$ (第二行, 三行加到第一行)

$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$

$\Rightarrow x_1,\cdots,x_n$

$x_1+\cdots+x_n=-a_1$

$x_1\cdots x_n=(-1)^n a_n$

2. $A_{3\times3}=(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_1)$ $B_{3\times3}=(\alpha_1,\alpha_2,\gamma_2)$

$|A|=3$, $|B|=2$ 求 $|A+2B|=?$

解: $A+2B=(3\alpha_1,3\alpha_2,\gamma_1+2\gamma_2)$

$|A+2B|=9|\alpha_1,\alpha_2,\gamma_1+2\gamma_2|$

$=9(|A|+2|B|)=9\times(3+4)=63$

3. $A_{3\times3}$, $A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r(A)<3$. $A\sim B$.

$|(2E+B)^*|=?$

解: $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1=-1$ $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_2=1$

$r(A)<3 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow \lambda_3=0$

$\therefore A\sim B$. $\therefore B$ 特征值 $-1, 1, 0$

$(2E+B)^*$ 特征值 $1, 3, 2$, $|2E+B|=6$ $\therefore |(2E+B)^*|=|2E+B|^2=36$

No. Date :

第二章 矩阵

一. defs.

1. 矩阵.

① $A=(a_{ij})_{m\times n}$. If $\forall a_{ij}=0$, $A=0$

② If $m=n$. A - n阶方程

③ $A_{n\times n}=(a_{ij})_{n\times n}$, If $\forall a_{ij}=a_{ji}$ 即 $A^T=A$ A - 实对称阵.

④ $A_{n\times n}$, If $A^TA=E$. A - 正交矩阵.

⑤ $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$ 对角阵

$\begin{pmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{pmatrix} \hat{=} aE$ - 数量矩阵.

2. 同型. 矩阵相等.

3. 运算:

③ $A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $B_{n\times s}=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ & \cdots & \\ b_{n1} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$

$AB=C=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} \\ & \cdots & \\ c_{m1} & \cdots & c_{ms} \end{pmatrix}$

$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$

Note:

① $A_{m\times n}$, $B_{n\times s}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

$AB=(A\beta_1, A\beta_2,\cdots,A\beta_s)$

② $A(B\vdots C)=(AB\vdots AC)$ $((B\vdots C)A\neq(BA\vdots CA))$

如证: $r(A\vdots AB)=r(A)$

证: $(A\vdots AB)=A(E\vdots B)$ $r(A)\leq r(A\vdots B)\leq r(A)+r(B)$

$r(A\vdots AB)\leq r(A)$

又: $r(A\vdots AB)\geq r(A)$

$\therefore r(A\vdots AB)=r(A)$

No. Date:

③ $\begin{cases} A \neq 0,\ B \neq 0 \not\Rightarrow AB \neq 0 \\ A \neq 0 \not\Rightarrow A^k \neq 0 \end{cases}$

④ AB不一定等于BA

⑤ $f(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 E$, $A_{n\times n}$

$\begin{cases} f(A) \text{ 因式分解.} \\ f(A) \text{ — 特征值, 特征向量 定义} \end{cases}$

如：例1. $A_{n\times n}$ $A^2 - A - 2E = 0$

证：$r(E+A) + r(2E-A) = n$

证：$(A+E)(A-2E) = 0 \Rightarrow (E+A)(2E-A) = 0$

$r(E+A) + r(2E-A) \leq n$

$r(E+A) + r(2E-A) \geq r(3E) = n$

$\Rightarrow r(E+A) + r(2E-A) = n$.

例2. $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $(\alpha, \beta) = 4$ $A = \alpha\beta^T$

求A特征值.

解：1° $A^2 = \alpha\beta^T \cdot \alpha\beta^T = 4A \Rightarrow A^2 - 4A = 0$

2° 令 $AX = \lambda X$ $(X \neq 0)$

$(A^2 - 4A)X = (\lambda^2 - 4\lambda)X = 0$.

$\because X \neq 0$, $\therefore \lambda^2 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ 或 $\lambda = 4$

3° $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ | \\ a_n \end{pmatrix}(b_1 - b_n) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & \cdots & a_1b_n \\ \cdots & & \\ a_nb_1 & & a_nb_n \end{pmatrix}$

$tr(A) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = 4$

$= \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$

$\Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$, $\lambda_n = 4$

二. 核心理论(一) —— 逆阵.

(一) def — $A_{n\times n}$ If $\exists B_{n\times n}$.

$AB = E$ 或 $BA = E$. $B \triangleq A^{-1}$

No. Date:

如：$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ 单位向量，判断 ~~E+~~ $E-\alpha\alpha^T$，$E+\alpha\alpha^T$ 的可逆性

解：令 $A=\alpha\alpha^T$

$A^2=A \Rightarrow A^2-A=0$

令 $AX=\lambda X \quad (X\neq 0)$

$(A^2-A)X=(\lambda^2-\lambda)X=0$

$\because X\neq 0$，$\therefore \lambda^2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0$ 或 $\lambda=1$.

$\because tr(A)=(\alpha,\alpha)=1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$,

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=1$.

$E-\alpha\alpha^T=E-A$ 特征值 1, 1, 0

$\because |E-\alpha\alpha^T|=0$，$\therefore E-\alpha\alpha^T$ 不可逆

$E+\alpha\alpha^T=E+A$，特征值 1, 1, 2,

$\because |E+A|=2\neq 0$，$\therefore E+\alpha\alpha^T$ 可逆.

如 $A^2-A-E=0 \quad (A+2E)^{-1}=?$

解. $(A+2E)(A-3E)+5E=0$.

$\Rightarrow (A+2E)\cdot\frac{1}{5}(3E-A)=E$

$(A+2E)^{-1}=\frac{1}{5}(3E-A)$

(二) 可逆判别法.

Th $A_{n\times n}$ n可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$.

Note：n可逆时，$A^*=|A|A^{-1}$

例1. A可逆 $K\neq 0$，求 $(KA)^*$

解：$(KA)^*=|KA|(KA)^{-1}=K^n|A|\cdot\frac{1}{K}\cdot A^{-1}=K^{n-1}|A|A^{-1}=K^{n-1}A^*$

例2，$A_{2\times 2}$，$B_{3\times 3}$. $|A|=a\neq 0$，$|B|=b\neq 0$.

$\begin{pmatrix}&A\\B&\end{pmatrix}^*=?$

解：$\begin{pmatrix}&A\\B&\end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix}&A\\B&\end{vmatrix}\begin{pmatrix}&A\\B&\end{pmatrix}^{-1}=(-1)^{2\times3}|A||B|\cdot\begin{pmatrix}&B^{-1}\\A^{-1}&\end{pmatrix}$

$=ab\begin{pmatrix}&B^{-1}\\A^{-1}&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&abB^{-1}\\abA^{-1}&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&aB^*\\bA^*&\end{pmatrix}$

No.　　Date :

(三). 求法.

方法一：伴随法.　$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

方法二，初等变换法：

1° 方程组同解变形：

① 对调两方程；

② 某方程乘以 $c\neq 0$；

③ 某方程 k倍加到另一个方程.

2° 矩阵初等行变换：

① 对调两行；

② 某行乘以 $c\neq 0$.

③ 某行k倍加到另一行.

3° 初等矩阵：

① $E(ij)\triangleq(\quad)$

$E(ij)^2=E$.

② $E(i(c))\triangleq(\quad)$

$(c\neq 0)$

③ $E(ij(k))\triangleq(\quad)$

Notes:

①初等行变换 } —— 初等变换
初等列变换 }

② 初等阵逆阵仍为初等阵且类型相同

4° 问是:

① $A_{n\times n}$, $|A|\neq 0$, $A\xrightarrow{行}E$.

② $A_{m\times n}$　$r(A)=r$.　$A\xrightarrow[?]{行}\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$? X

如：$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\1&0&1&-5\\3&-2&5&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\0&1&-1&-8\\0&1&-1&-8\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\0&1&-1&-8\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&-5\\0&1&-1&-8\end{pmatrix}$

No. Date :

③ $A_{m\times n}$, $r(A)=r$, $A \xrightarrow[列]{行} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?√

5° 几个结论：

Th1. $A_{n\times n}$，且 $|A|\neq 0$，则 $(A \vdots E) \xrightarrow{行} (E \vdots A^{-1})$

Th2. $A_{n\times n}$, $B_{n\times s}$, $|A|\neq 0$，则

$(A \vdots B) \xrightarrow{行} (E \vdots A^{-1}B)$.

证：∵ $|A|\neq 0$ ∴ $\exists P_1, \cdots, P_s$ 使.

$P_s \cdots P_1 A = E$. $P_s \cdots P_1 = A^{-1}$

$B \xrightarrow{行} P_s \cdots P_1 B = A^{-1}B$.

即 $(A \vdots B) \xrightarrow{行} (E \vdots A^{-1}B)$

Th3. $A_{m\times n}$ 且 $r(A)=r$ 则 $\exists$ 可逆阵 P, Q. 使

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

证，∵ $r(A)=r$. ∴ $\exists P_1, \cdots, P_s, Q_1, \cdots, Q_t$, 使

$$P_s \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_t = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令 $P = P_s \cdots P_1$ $Q = Q_1 \cdots Q_t$ P, Q 可逆，使

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

三. 核心理论(二)–秩.

(一) def– $A_{m\times n}$

If ① $\exists$ r 阶子式不为 0；

② $\forall$ $r+1$ 阶子式(不一定有) 皆为 0.

称 $r(A)=r$

Notes:

① $A_{m\times n} \Rightarrow \begin{cases} r(A)\leq m \\ r(A)\leq n \end{cases}$

② $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $r(\alpha)\leq 1$

③ $A_{n\times n}$，A可逆（$|A|\neq 0$）．A非奇异（$|A|\neq 0$）．$r(A)=n$

满秩（$|A|\neq 0$）．

if $r(A)<n$　A-降秩

(二) $r(A)$求法．

$A \xrightarrow{行} \begin{pmatrix} \text{阶梯形} \end{pmatrix}$

Notes．

① $r(A)=0 \Leftrightarrow A=0$．

② $r(A)\geq 1 \Leftrightarrow A\neq 0$．

③ $r(A)\geq 2 \Leftrightarrow$ 至少两行不成比例

(三) 性质：

1. $r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$

证：令 $AX=0$　(*)

$A^TAX=0$　(**)

若 $AX_0=0 \Rightarrow A^TAX_0=0$．

即 (*) 的解为 (**) 的解．

若 $A^TAX_0=0 \Rightarrow X_0^TA^TAX_0=0$

$\Rightarrow (AX_0)^T(AX_0)=0 \Rightarrow AX_0=0$．即 (**) 的解为 (*) 的解．

∴ (*)，(**) 同解．　∴ $r(A)=r(A^TA)$

2. $\begin{cases} r(A)\leq r(A\vdots B)\leq r(A)+r(B) \\ r(B)\leq r(A\vdots B)\leq r(A)+r(B) \end{cases}$

3. $r(A\pm B)\leq r(A)+r(B)$　见．$A+B$　$A-B$　$r(A)+r(B)$

4. $r(AB)\leq r(A)$，$r(AB)\leq r(B)$

5. $A_{m\times n}$，$B_{n\times s}$．$AB=0 \Rightarrow r(A)+r(B)\leq n$．

6. P、Q可逆．$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$

7. $r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$

8. ① $r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix} \le r(A)+r(B)$;

② $r\begin{pmatrix}A & O\\O & B\end{pmatrix} = r(A)+r(B)$

9. $r(A)=1 \Leftrightarrow \exists\, \alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\neq 0,\ \beta=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\neq 0$ 使 $A=\alpha\beta^T$

例1. $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ 单位. $A=E-\alpha\alpha^T$ A可逆否?

解: 法一. $A^2=(E-\alpha\alpha^T)(E-\alpha\alpha^T)=E-2\alpha\alpha^T+\alpha\alpha^T=A$

$\Rightarrow A-A^2=0 \Rightarrow A(E-A)=0.$

$r(A)+r(E-A)\le n.$

$r(A)+r(E-A)\ge r(E)=n.$

$\underline{r(A)}+r(E-A)=n$

$\because A=E-\alpha\alpha^T \Rightarrow E-A=\alpha\alpha^T$

$r(E-A)=r(\alpha\alpha^T)=r(\alpha)=1 \Rightarrow r(A)=n-1<n$ $\therefore A=E-\alpha\alpha^T$不可逆

法二: $B=\alpha\alpha^T$, $B^2=B \Rightarrow B^2-B=0.$

令 $BX=\lambda X\ (X\neq 0) \Rightarrow (B^2-B)X=(\lambda^2-\lambda)X=0.$

$\because X\neq 0 \therefore \lambda^2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0$ 或 $\lambda=1$.

$\because tr(B)=(\alpha,\alpha)=1=\lambda_1+\cdots+\lambda_n.$

$\therefore \lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\ \lambda_n=1$

$\therefore A=E-B$ 特征值. $1,\cdots,1,0.$

$|A|=0$, A不可逆

2. $A\neq 0$. $A^k=0$. 证: $E-A$可逆.

证: 法一. $E=E-A^k=(E-A)(E+A+\cdots+A^{k-1})$

$\therefore E-A$可逆, 且 $(E-A)^{-1}=E+A+\cdots+A^{k-1}$

法二. 令 $AX=\lambda X\quad (X\neq 0)$

$A^kX=\lambda^kX=0.$

$\because X\neq 0.\ \therefore \lambda^k=0 \Rightarrow \lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$

$E-A$ 特征值, $1,1,\cdots,1$. $\therefore |E-A|=1\neq 0$ $\therefore E-A$可逆

3. $A_{m\times n}$, $r(A)=n$ $AB=AC$ 证：$B=C$.

证：$AB=AC \Rightarrow A(B-C)=0$

$r(A)+r(B-C)\le n$

∵ $r(A)=n$ ∴ $r(B-C)=0 \Rightarrow B-C=0 \Rightarrow B=C$

4. $A_{n\times n}$, $r(A)<n$ $A_{21}\neq 0$ 证∃$K\in R$ 使 $(A^*)^2=KA^*$

证：$r(A)<n \Rightarrow r(A^*)=0$ 或 1.

∵ $A_{21}\neq 0$ ∴ $r(A^*)=1$.

∃ $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, 使 $A^*=\alpha\beta^T$

$(A^*)^2=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=\cancel{k\alpha\beta^T}KA^*$, $k=(\alpha,\beta)$.

型一、求矩阵

Case1. 化简 → $AX=B$ 且 A 可逆. $X=A^{-1}B$.

P49.例1. 解：$|A|=-2$

$AA^*BA=2ABA-8A = -2BA=2ABA-8A$

∵ A 可逆 ∴ $-2B=2AB-8E$

$\Rightarrow (E+A)B=4E \Rightarrow B=4(E+A)^{-1}$

$E+A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $(E+A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&&\\&-1&\\&&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&&\\&-4&\\&&2\end{pmatrix}$

P50 例3. 解：$AXA+BXB=AXB+BXA+A(A-B)$

$\Rightarrow AX(A-B)-BX(A-B)=A(A-B)$

$\Rightarrow (A-B)X(A-B)=A(A-B)$

$A-B=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 可逆.

∴ $(A-B)X=A \Rightarrow X=(A-B)^{-1}A$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0&0\\0&1&-1&1&1&0\\0&0&1&1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&4&3&2\\0&1&0&2&2&1\\0&0&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

∴ $X=\begin{pmatrix}4&3&2\\2&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

Case 2. 化为 $AX=B$. 且A不可逆 或 A不是方阵.

Th. $AX=B$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A\,\vdots\,B)$

设 $B=(b_1,\cdots,b_s)$, $X=(X_1,\cdots,X_s)$

$AX=B \Leftrightarrow AX_1=b_1, \cdots\cdots, AX_s=b_s.$

例1. $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\2&-1&3&-1\\4&-3&7&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&-1\\5&3\end{pmatrix}$

$AX=B$, 求 X.

解: $X=(X_1,X_2)$, $B=(b_1,b_2)$

$AX=B \Leftrightarrow AX_1=b_1, AX_2=b_2.$

$\because (A\,\vdots\,B)=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&1&2\\2&-1&3&-1&3&-1\\4&-3&7&1&5&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&2&1&1&2\\0&1&-1&-3&1&-5\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&-2&2&-3\\0&1&-1&-3&1&-5\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore X_1=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_1+2k_2+2\\k_1+3k_2+1\\k_1\\k_2\end{pmatrix}$

$X_2=k_3\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-5\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_3+2k_4-3\\k_3+3k_4-5\\k_3\\k_4\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}-k_1+2k_2+2&-k_3+2k_4-3\\k_1+3k_2+1&k_3+3k_4-5\\k_1&k_3\\k_2&k_4\end{pmatrix}$ ($k_1\sim k_4$ 任意)

Note: X未知数少时，有时X可一一列出未知量.

例2: $A_{2\times2}$、$B_{2\times2}$、$C_{2\times2}$ 含 a,b)

$AX-XB=C$

讨论 a,b 取值, X是否存在, 若存在求X.

解: 令 $X=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$

$AX=\begin{pmatrix}?&?\\?&?\end{pmatrix}$, $XB=\begin{pmatrix}?&?\\?&?\end{pmatrix}$

$$AX-XB=\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

$$AX-XB=C=\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{——} = ? \\ \text{——} = ? \\ \text{——} = ? \\ \text{——} = ? \end{cases}$$

Case3. $A_{n\times n}$

1° $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \lambda_1, \cdots, \lambda_n$

2° α_1, α —— α_n?

3° $P=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$. $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$

例1. $A_{3\times3}$. $A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ A每行元素之和为0. 求A.

解. $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1=0,\ \alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_2=-1,\ \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_3=1,\ \alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $A=P\begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$

型二. A^m

① 归纳

② $A=\alpha\beta^T$ $(r(A)=1)$.

$A^m=k^{m-1}A$, $k=(\alpha,\beta)$

例1. $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. $A=\alpha\alpha^T$ 求 $|6E-A^n|$.

解: 法一. $A^2=2A \Rightarrow A^2-2A=0$.

令 $AX=\lambda X$ $(X\neq 0)$

$(A^2-2A)X=(\lambda^2-2\lambda)X=0$.

$\because X\neq 0$ $\therefore \lambda^2-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0$ 或 $\lambda=2$.

而 $Tr(A)=(\alpha,\alpha)=2 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$ $\lambda_3=2$

No. Date :

$6E-A^n$ 特征值 $6, 6, 6-2^n$.

$\therefore |6E-A^n| = 36(6-2^n)$

法二：$A^n = 2^{n-1}A = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & -2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

$|6E-A^n| = \begin{vmatrix} 6-2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 6 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 6-2^{n-1} \end{vmatrix} = 6[(6-2^{n-1})^2 - 2^{2n-2}]$

③ $A_{n\times n}$, $\begin{cases} \lambda_1 \cdots \lambda_n \\ \alpha_1 \cdots \alpha_n \\ P = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \end{cases} \Rightarrow A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$

$\Rightarrow A^m = P\begin{pmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^m \end{pmatrix}P^{-1}$

型三 初等矩阵.

例1. $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A_{3\times3}$.

A对调2.3列后，第一行2倍加到第2行成C　　A=?

(A) P_1CP_2　(B) $P_1^{-1}CP_2$　(C) $P_1CP_2^{-1}$　(D) $P_2^{-1}CP_1$ ✓

解：$P_2AP_1 = C$

$\Rightarrow A = P_2^{-1}CP_1^{-1} \Rightarrow P_2^{-1}CP_1$

例2. $A_{3\times3}$ 可逆，对调A的1.3行成B. B^*与A^*?

解：$B = E_{13}A$

$B^* = |B|\cdot B^{-1} = -|A|\cdot A^{-1}E^{-1}_{(13)} = -A^*E_{(13)}$

附：矩阵等价.

1. def — A.B为同型矩阵. 若A经过有限次初等变换化为B. 称A.B等价.

2. 判别法.

Th. A.B同型，则A.B等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$

题型四. 秩证明.

1. $A_{m\times n}$. $A^TA=0$, 证: $A=0$.

证: $A^TA=0 \Rightarrow r(A^TA)=0 \Rightarrow r(A)=0 \Rightarrow A=0$

2. $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$

① $r(A)\le 2$ ② 若 α,β 线性相关. 证 $r(A)\le 1$

证: ① $r(A)\le r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)=r(\alpha)+r(\beta)\le 1+1=2$

② ∵ α,β 成比例.

∴ 设 $\beta=k\alpha$.

$A=(1+k^2)\alpha\alpha^T$

∵ $1+k^2\ne 0$ ∴ $r(A)=r(\alpha\alpha^T)=r(\alpha)\le 1$

3. $A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$ $(n>m)$ $AB=E$.

求 $r(A)$, $r(B)$.

解: $r(AB)=m \Rightarrow \begin{cases} r(A)\ge m \\ r(B)\ge m\end{cases}$

又 $r(A)\le m$, $r(B)\le m$.

∴ $r(A)=m$, $r(B)=m$.

P_{52} 例6. 解 $B\ne 0 \Rightarrow r(B)\ge 1$

$AB=0 \Rightarrow r(A)+r(B)\le 3 \Rightarrow r(A)\le 2<3 \Rightarrow |A|=0$.

第三章 向量

一、defs.

1. $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\a_n\end{pmatrix}$

$|\alpha|=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$ $\begin{cases} |\alpha|=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \\ \text{If } |\alpha|=1, \alpha\text{一单位向量} \\ \text{设 } \alpha\ne 0,\ \alpha^0=\frac{1}{|\alpha|}\alpha. \end{cases}$

2. 内积.

$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\a_n\end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\b_n\end{pmatrix}$ $(\alpha,\beta)=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$

No. Date :

Note:

① $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$.

② $(\alpha,\alpha)=\alpha^T\alpha=|\alpha|^2$

If $(\alpha,\alpha)=0$，则 $\alpha=0$

③ $(\alpha, k_1\beta_1+\cdots+k_s\beta_s)=k_1(\alpha,\beta_1)+\cdots+k_s(\alpha,\beta_s)$

④ If $(\alpha,\beta)=0$，$\alpha\perp\beta$，

二、核心理论（一）—— 相关性与线性表示

$$x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=0 \quad (*)$$

$$x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=b \quad (**)$$

（一）defs.

1. 相关性 — $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$；

① $(*)$ 只有零解；，称 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关

② $(*)$ 有非零解；称 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关。

2. 线性表示 — $\alpha_1,\cdots\alpha_n,b$.

① $(**)$ 有解；称 β 可由 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性表示

② $(**)$ 无解；称 β 不可由 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性表示

（二）性质：

1. $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 至少一个向量可由其余向量线性表示.

"$\Rightarrow$" $\exists$ 不全为0，$k_1,\cdots,k_n$ 使.

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0.$$

设 $k_1\neq0$. $\alpha_1=-\frac{k_2}{k_1}\alpha_2-\cdots-\frac{k_n}{k_1}\alpha_n$

"$\Leftarrow$" 设 $\alpha_k=l_1\alpha_1+\cdots+l_{k-1}\alpha_{k-1}+l_{k+1}\alpha_{k+1}+\cdots+l_n\alpha_n$

$\Rightarrow l_1\alpha_1+\cdots+l_{k-1}\alpha_{k-1}+(-1)\alpha_k+l_{k+1}\alpha_{k+1}+\cdots+l_n\alpha_n=0$

$\therefore \alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性相关.

Notes:

① 含0向量的向量组一定线性相关.

② α,β 线性相关 $\Leftrightarrow$ α,β 成比例

证 "$\Rightarrow$" $\exists$ 不全为0的 k_1,k_2，使 $k_1\alpha+k_2\beta=0$.

设 $k_2 \neq 0 \Rightarrow \beta = -\frac{k_1}{k_2}\alpha$

"$\Leftarrow$" 设 $\beta = l\alpha$. $\Rightarrow l\alpha + (-1)\beta = 0$.

$\Rightarrow \alpha, \beta$ 线性相关.

2, $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性无关.

① $\alpha_1 \text{——} \alpha_n, \beta$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ β 不可由 $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ 线性表示

② $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta$ 线性相关 $\Rightarrow$ β 可由 $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ 唯一线性表示

"$\Rightarrow$"

$\exists$ 不全为 0 的 $k_1, \cdots k_n, k_0$ 使.

$k_1\alpha_1 + \text{——} + k_n\alpha_n + k_0\beta = 0$.

$k_0 \neq 0$ 若

若 $k_0 = 0 \Rightarrow k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$.

$\because \alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性无关, $\therefore k_1 = \cdots = k_n = 0$ 矛盾.

$\therefore k_0 \neq 0. \Rightarrow \beta = -\frac{k_1}{k_0}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_n}{k_0}\alpha_n$

令 $\begin{cases} \beta = l_1\alpha_1 + \cdots + l_n\alpha_n \\ \beta = t_1\alpha_1 + \cdots + t_n\alpha_n \end{cases}$

$\Rightarrow (l_1 - t_1)\alpha_1 + \cdots + (l_n - t_n)\alpha_n = 0$

$\because \alpha_1 \text{——} \alpha_n$ 线性无关

$\therefore l_1 = t_1 \cdots l_n = t_n$.

3, 全组无关 $\Rightarrow$ 部分组线性无关.

4. 部分组相关 $\Rightarrow$ 全组线性相关

5. $\alpha_1, \text{——} \alpha_n$ 为 n 个 n 维向量

① $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow |\alpha_1 \cdots \alpha_n| \neq 0$

证: $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$

只有零解 $\Leftrightarrow D \neq 0$. 即 $|\alpha_1 \text{——} \alpha_n| \neq 0$.

$(A = (\alpha_1 \text{—} \alpha_n)$ $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1 \text{—} \alpha_n$ 秩 $= n$.

$\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0)$

② $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1 \cdots \alpha_n| = 0$.

证: 令 $A = (\alpha_1, \text{——}, \alpha_n)$.

No. Date:

$\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 的秩 $<n$.

$\Leftrightarrow r(A)<n \Leftrightarrow |A|=0$

6. $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ 为 n 个 m 维向量 $(m<n)$

则 $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ 线性相关.

证明: 令 $A=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$. $A_{m\times n}$, $r(A)\le m<n$

$\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 的秩 $<n$

$\Leftrightarrow r(A)<n$.

而 $r(A)\le m<n$, $\therefore \alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性相关.

7. ① 添加个数 提高相关性.

② 添维数 提高无关性.

8. $\alpha_1 \cdots \alpha_n \begin{cases} 非零 \\ 两两正交 \end{cases} \underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} \alpha_1, \cdots \alpha_n$ 线性无关.

"$\Rightarrow$" 令 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$

由 $(\alpha_1, k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n) = 0$

$\Rightarrow k_1(\alpha_1, \alpha_1)=0$

$\because (\alpha_1, \alpha_1)>0 \quad \therefore k_1=0$

$k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$.

由 $(\alpha_2, k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n) = 0$

$\Rightarrow k_2(\alpha_2, \alpha_2)=0$

$\because (\alpha_2, \alpha_2)>0 \quad \therefore k_2=0$

$\cdots \quad k_n\alpha_n=0. \quad \because \alpha_n\neq 0 \therefore k_n=0$, $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ 线性无关.

"$\nLeftarrow$" $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} \quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$

$\because \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = (3-1)(3-2)(2-1) = 2 \neq 0$.

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

但 $(\alpha_1, \alpha_2)=7$.

No. Date :

例1. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

α_5 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 证: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4-\alpha_5$ 线性无关

证: 方法一. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 线性无关

$$\alpha_4 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3.$$

令 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4(\alpha_4-\alpha_5) = 0.$

$\Rightarrow (k_1+l_1k_4)\alpha_1 + (k_2+l_2k_4)\alpha_2 + (k_3+l_3k_4)\alpha_3 + (-k_4)\alpha_5 = 0$

$\because \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 线性无关

$$\therefore \begin{cases} k_1 + l_1k_4 = 0 \\ k_2 + l_2k_4 = 0 \\ k_3 + l_3k_4 = 0. \\ -k_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \\ k_4 = 0 \end{cases}$$

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4-\alpha_5$ 线性无关

方法二: 令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5)$

$\because \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 线性无关.

$\therefore r(A) = 4.$

$\alpha_4 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3.$

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4-\alpha_5)$$
$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 - \alpha_5)$$
$$= A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\because \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 可逆. $\therefore r(B) = r(A) = 4.$

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4-\alpha_5$ 线性无关.

2. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\alpha_3 \neq 0$，且 $A\alpha_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2$，$A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3$ $A\alpha_3 = 2\alpha_3$

证：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

证：$(A-2E)\alpha_1 = \alpha_2$ $(A-2E)\alpha_2 = \alpha_3$ $(A-2E)\alpha_3 = 0$

令 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ (*)

(*)左乘 $A-2E$，有.

$k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3 = 0$ (**)

(**)左乘 $A-2E$ 有

$k\alpha_3 = 0$

$\because \alpha_3 \neq 0$ $\therefore k_1 = 0$，代入(**)

$k_2\alpha_3 = 0$

$\because \alpha_3 \neq 0$ $\therefore k_2 = 0$ 代入(*)

$k_3\alpha_3 = 0$

$\because \alpha_3 \neq 0$ $\therefore k_3 = 0$

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

3. α_1, α_2 与 β_1, β_2 皆三维且线性无关.

证. $\exists\ \delta \neq 0$ 使 δ 可同时由 α_1, α_2 与 $\beta_1\ \beta_2$ 线性表示

证：$\because \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 线性相关

$\therefore \exists$ 不全为0的 k_1, k_2, l_1, l_2 使

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + l_1\beta_1 + l_2\beta_2 = 0.$

$\Rightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = -l_1\beta_1 - l_2\beta_2 \triangleq \delta$

$\delta \neq 0.$

若 $\delta = 0$. $\Rightarrow \begin{cases} k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \\ l_1\beta_1 + l_2\beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} k_1 = k_2 = 0 \\ l_1 = l_2 = 0 \end{matrix}$ 矛盾. $\therefore \delta \neq 0.$

4. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

证：α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

证：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 $\Rightarrow \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关 $\Rightarrow \alpha_4$ 可由 α_2, α_3 线性表示

$\alpha_4 = k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$

5. $A_{n\times n}$，$A^{n-1}\alpha\neq 0$，$A^n\alpha=0$.

证：$\alpha, A\alpha, \cdots, A^{n-1}\alpha$ 线性无关. 列 $A_{m\times n}X_{n\times 1}$ AX 列.

记 令 $k_0\alpha+k_1A\alpha+\cdots+k_{n-1}A^{n-1}\alpha=0$ (*)

(*) 左乘 A^{n-1} $k_0A^{n-1}\alpha=0$

$\because A^{n-1}\alpha\neq 0$ $\therefore k_0=0$

$k_1A\alpha+\cdots+k_{n-1}A^{n-1}\alpha=0$ (*)

(*) 左乘 A^{n-2} $k_1A^{n-1}\alpha=0$.

$\because A^{n-1}\alpha\neq 0$ $\therefore k_1=0$.

$\cdots\cdots$

$k_{n-1}A^{n-1}\alpha=0$ $\because A^{n-1}\alpha\neq 0$ $\therefore k_{n-1}=0$.

$\therefore \alpha, A\alpha, \cdots A^{n-1}\alpha$ 线性无关.

三. 向量组等价，极大线性无关组.

(一) defs.

1. 向量组等价：$A:\alpha_1,\cdots,\alpha_m$；$B:\beta_1,\cdots,\beta_n$.

If
$$\begin{cases}\beta_1=k_{11}\alpha_1+\cdots+k_{1m}\alpha_m\\ \cdots\\ \beta_n=k_{n1}\alpha_1+\cdots+k_{nm}\alpha_m\end{cases}\quad(1)$$

称 B 组可由 A 组线性表示.

If
$$\begin{cases}\alpha_1=l_{11}\beta_1+\cdots+l_{1n}\beta_n\\ \cdots\\ \alpha_m=l_{m1}\beta_1+\cdots+l_{mn}\beta_n\end{cases}\quad(2)$$

称 A 组可由 B 组线性表示.

若 (1) (2) 成立，称 A 组与 B 组等价

2. 极大线性无关组 — If

① $\exists$ r 个向量线性无关.

② $\forall$ r+1 个向量线性相关.

称 r 个线性无关的向量组为极大组. r 为该向量组的秩.

No. Date:

Notes:

① 极大组不一定唯一. 如: $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

② 向量组与极大组等价

如: 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 为 $\alpha_1, \cdots \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots \alpha_n$ 的极大组.

令 $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_r$; $B: \alpha_1, \cdots \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$.

$\because \begin{cases}\alpha_1 = 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + 0\alpha_n \\ \cdots\cdots \\ \alpha_r = 0\alpha_1 + \cdots + 1\alpha_r + 0\alpha_n\end{cases}$

$\therefore$ A组可由B组线性表示.

又 $\begin{cases}\alpha_1 = 1\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_r \\ \cdots \\ \alpha_r = 0\alpha_1 + \cdots + 1\alpha_r \\ \alpha_{r+1} = l_{r+1,1}\alpha_1 + \cdots + l_{r+1,r}\alpha_r \\ \cdots \\ \alpha_n = l_{n1}\alpha_1 + \cdots + l_{nr}\alpha_r\end{cases}$

即B组可由A组线性表示.

$\therefore$ A组与B组等价.

③ $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 秩 $= n$.

$\Longleftrightarrow r(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = n$.

$\alpha_1, \cdots \alpha_n$ 线性相关 $\Longleftrightarrow r(\alpha_1, \cdots \alpha_n) < n$.

如: $\alpha_1, \cdots \alpha_5$ 线性无关 (5奇), $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$, $\cdots$, $\beta_5 = \alpha_5 + \alpha_1$, 证: $\beta_1 \cdots \beta_5$ 线性无关.

证: $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_5)$ $r(A) = 5$.

$B = (\beta_1, \cdots, \beta_5) = A\begin{pmatrix}1 & 0 & & 1\\ 1 & 1 & & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & & 0\\ 0 & 0 & & 1\end{pmatrix} = AC$

$\because |C| = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix} = A_{11} + A_{15} = M_{11} + (-1)^{5+1}M_{15} = 2 \neq 0$.

$\therefore$ C可逆.

$\therefore r(B) = r(A) = 5$ $\therefore \beta_1 \cdots \beta_5$ 线性无关.

补线代、

Date. /

④ $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_n$；$\bar{A}: \alpha_1, \cdots, \alpha_n, b$

Case 1. A组秩 = $\bar{A}$组秩 $\Leftrightarrow$ b可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性表示

Case 2. $\bar{A}$组秩 = A组秩 +1 $\Leftrightarrow$ b不可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性表示.

⑤ $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = (\beta_1 \cdots \beta_n)$.

$\alpha_1 \cdots \alpha_m$ — 行组. $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 的秩 — 行秩.

$\beta_1 \cdots \beta_n$ — 列组. $\beta_1 \cdots \beta_n$ 的秩 — 列秩.

例1. $A_{n\times n} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \cdots & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ 可逆.

$C = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$

(A) A行组与C行组等价

(B) 列 列

(C) 列 行

(D) 行 列

$AB = C \Rightarrow A\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 = b_{11}\alpha_1 + \cdots + b_{n1}\alpha_n$

$\Downarrow$

C列可由A列线性表示

$A\begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix} = \gamma_2 \Rightarrow \gamma_2 = b_{12}\alpha_1 + \cdots + b_{n2}\alpha_n$

$\cdots$

$A\begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} = \gamma_n \Rightarrow \gamma_n = b_{1n}\alpha_1 + \cdots + b_{nn}\alpha_n$

$\because$ B可逆 $\therefore$ ~~A~~ $CB^{-1} = A$.

$\Rightarrow$ A列可由C列线性表示.

⑥ $AB = A(\gamma_1, \cdots, \gamma_s) = (A\gamma_1, \cdots, A\gamma_s)$.

⑦ $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$

$B = (k_{11}\alpha_1 + \cdots + k_{1s}\alpha_s, k_{21}\alpha_1 + \cdots + k_{2s}\alpha_s, k_{m1}\alpha_1 + \cdots + k_{ms}\alpha_s)$.

$= A\begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{1s} & & k_{ms} \end{pmatrix}$

(二) 性质:

1. 矩阵三秩等.

2. A组可由B组线性表示 $\Rightarrow$ A组秩 $\le$ B组秩.

3. 若A组与B组等价 $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ A组秩 = B组秩.

① 证 "2"

设 $A: \alpha_1 \cdots \alpha_m$ $B = \beta_1 \cdots \beta_s$.

Date. /

$A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$. $B = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$

$\because \begin{cases} \alpha_1 = k_{11}\beta_1 + \cdots + k_{1n}\beta_n \\ \cdots \\ \alpha_m = k_{m1}\beta_1 + \cdots + k_{mn}\beta_n \end{cases}$

$$A = B\begin{pmatrix} k_{11} & & k_{m1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{1n} & & k_{mn} \end{pmatrix} = BK$$

$r(A) \le r(B)$

② 证 "⇒"

$\because$ A组可由B组线性表示 $\therefore$ A组秩 $\le$ B组秩

又 $\because$ B组可由A组线性表示 $\therefore$ B组秩 $\le$ A组秩.

"⇍" A: $\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$; B: $\beta_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$ $\beta_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$

A组秩 = B组秩 = 2. A组与B组不等价.

Notes:

①

若A组可由B组线性表示, B组不可由A组线性表示

⇒ A组秩 < B组秩.

② 若A组秩 = B组秩, 且A组可由B组线性表示

⇒ A组与B组等价.

例1. $A_{m\times n} \ne 0$, $B_{n\times s} \ne 0$, $AB = 0$.

(A) A行相关, B行相关

(B) 列 列

(C) 列 行

(D) 行 列

$A \ne 0 \Rightarrow r(A) \ge 1$

$B \ne 0 \Rightarrow r(B) \ge 1$

$AB = 0$ $r(A) + r(B) \le n$.

$\Rightarrow r(A) < n$. $r(B) < n$

例2. $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 为 n 个 n 维向量，证.

$$\alpha_1 \cdots \alpha_n \text{ 线性无关} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \cdots & & \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{vmatrix} \neq 0$$

证：$A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$

$$A^TA = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \cdots & & \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow r(A^TA) = n \Leftrightarrow |A^TA| \neq 0$.

专题五：极大组求法.

P88. 例1. 解：

$$(\alpha_1 \cdots \alpha_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为极大组

$$\begin{cases} \alpha_3 = 3\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_4 \\ \alpha_5 = 2\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_4 \end{cases}$$

等价专题：

P_{78} 例2.

$\because$ I 可由 II 线性表示，II 不可 I 线性表示

$\therefore r(\mathrm{I}) < r(\mathrm{II}) \leq 3 \Rightarrow r(\mathrm{I}) < 3$

Date. /

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

而 $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(a+2)(a-1)^2 = 0$$

$\Rightarrow a=1$ 或 $a=-2$

Case 1. $a=1$ I: $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; II: $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\beta_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$ $\beta_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

I组可由II组线性表示，但II组不可 ——

Case 2. $a=-2$ $r(I)=2$. II. $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\beta_2=\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$ $\beta_3=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$ $r(II)=2$

$\therefore a=-2$ 舍.

P78 例3. 解:

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a+1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ a+3 & a+6 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

$\Rightarrow a \neq -1$

$\therefore$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1$ 线性相关 $\Rightarrow$ β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

同理. β_2, β_3 也可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

即 II 可由 I 线性表示.

$\therefore$ I, II 等价.

(2) $a=-1$ $r(I)<3$ $r(II)=3$.

$\therefore$ I, II 不等价.

第四章. 方程组

一. 结构: $A_{m\times n}$

$$AX=0 \quad (*)$$

$$AX=b \quad (**)$$

2. $\eta_1,\cdots,\eta_s$ 为 $(**)$ 解.

① $k_1\eta_1+\cdots+k_s\eta_s$ 为 $(*)$ 解 $\Leftrightarrow$ $k_1+\cdots+k_s=0$

② $k_1\eta_1+\cdots+k_s\eta_s$ 为 $(**)$ 解 $\Leftrightarrow$ $k_1+\cdots+k_s=1$

二. 理论.

Th1. 对 $(*)$:

① $r(A)=n \Leftrightarrow (*)$ 只有零解.

② $r(A)<n \Leftrightarrow (*)$ 有非零解.

Th2. 对 $(**)$:

① $(**)$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})$ $\begin{cases} =n, & 唯一解. \\ <n, & 无数解. \end{cases}$

② $(**)$ 无解 $\Leftrightarrow r(A)\neq r(\bar{A})$

Q1. $A_{m\times n}$.

$AX=0$ 只有零解. 与 $AX=b$ 唯一解 ?

$$\begin{array}{ccc} \Updownarrow & \Leftarrow & \Updownarrow \\ r(A)=n & \not\Rightarrow & r(A)=r(\bar{A})=n. \end{array}$$

反例: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad r(A)=2 \quad AX=0$ 只有零解.

$b=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

$r(A)\neq r(\bar{A})$. $AX=b$ 无解.

Q2. $A_{m\times n}$ $\quad r(A)=m$, 问 $AX=b$ 是否一定有解?

一定

$\because r(A)\le r(\bar{A}) \quad \therefore r(\bar{A})\ge m;$

又$\because$ $\bar{A}$ 为 $m\times(n+1)$ 阶.

$\therefore r(\bar{A})\le m \quad \therefore r(\bar{A})=m \Rightarrow r(A)=r(\bar{A})=m.$

Date. /

Th3. $A_{m\times n}$, $B=(\beta_1,\cdots,\beta_s)$ 若 $AB=0$.

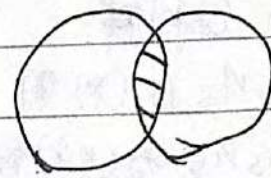
则 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 为 $AX=0$ 解.

证: $AB=(A\beta_1,\cdots,A\beta_s)$.

∵ $AB=0$ ∴ $A\beta_1=0,\cdots,A\beta_s=0$.

Th4. $AX=b$ (I)

$BX=c$ (II)



令 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix}$ (III)

则III的解 即I.II公共解.

注: ① $A_{m\times n}$, $B_{n\times s}$. $AB=0 \Rightarrow r(A)+r(B)\le n$ 证明:

证: 令 $r(A)=r$. 极线性无关 跟自由一样多.

令 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $AX=0$ 的基础解系.

∵ $AB=0$, ∴ $\beta_1\cdots\beta_s$ 为 $AX=0$ 的解.

∵ $\beta_1\cdots\beta_s$ 可由 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表示.

∴ $\beta_1\cdots\beta_s$ 的秩 $\le$ $\xi_1\cdots\xi_{n-r}$ 的秩

即 $r(B)\le n-r \Rightarrow r(A)+r(B)\le n$.

② $\begin{cases} r(AB)\le r(B) \\ r(AB)\le r(A) \end{cases}$ 证明:

证: 令 $BX=0$ (I)

$ABX=0$ (II)

if $BX_0=0 \Rightarrow ABX_0=0$ 即 (I)的解为(II)的解.

∴ $r(AB)\le r(B)$

又 $r(AB)=r[(AB)^T]=r(B^TA^T)\le r(A^T)\le r(A)$.

型二. 结构与性质.

P_{100} 1.解: $r(A)=3<4$

∵ $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=0$. ∴ $X=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ (k任意)

Date. /

2. 解, $r(A)<4 \Rightarrow r(A^*)=0$ 或 1.

$\because A_{21}\neq 0$. $\therefore r(A^*)=1 \Rightarrow r(A)=3<4$.

$\because AA^*=|A|E=0$

$\therefore x=k\begin{pmatrix}A_{21}\\A_{22}\\A_{23}\\A_{24}\end{pmatrix}$ (k 任意)

3. 解 $r(A)=r(\bar{A})<n \Rightarrow r(A^*)=0$ 或 1

$\because A_{11}\neq 0$ $\therefore r(A^*)=1 \Rightarrow r(A)=r(\bar{A})=n-1$. (A)

4. 解: $\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & a_2 & 4 & -1 & d_1\\ b_1 & 1 & b_3 & b_4 & d_2\\ 2 & c_2 & c_3 & 1 & d_3\end{pmatrix}$, $r(A)=r(\bar{A})<4$.

又 $r(A)\geq 2$

$\xi_1=\eta_1-\eta_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\3\end{pmatrix}$, $\xi_2=\eta_1-\eta_3=\begin{pmatrix}-1\\-3\\-2\\4\end{pmatrix}$

ξ_1,ξ_2 为 $AX=0$ 的线性无关解.

$\therefore$ ~~4~~ $-r(A)\geq 2 \Rightarrow r(A)\leq 2$.

$\therefore r(A)=r(\bar{A})=2<4$

$\therefore x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta_1$.

5. 解: $r(A)=3$. $A\begin{pmatrix}1\\0\\-4\\0\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \alpha_1=4\alpha_3$.

$r(A)=3 \Rightarrow r(A^*)=1<4$.

$A^*A=|A|E=0$.

$\Rightarrow \alpha_1\sim\alpha_4$ 为 $A^*X=0$ 的解

$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\\ \alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\end{cases}$ 为 $A^*X=0$ 的基础解系.

(C)

Date. /

6.解: $r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = r(A) \le n < n+1$ (D)

7.解: $r(A)=3<5$.

$\because \begin{cases} \alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3-\alpha_4+0\alpha_5=0 \\ \alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3+3\alpha_4-\alpha_5=0. \end{cases}$

$\therefore X = k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\3\\-1\end{pmatrix}$

8 解: (1). $r(A)=r(\bar{A})=3<4$.

$\xi=(\alpha_2-\alpha_1)+(\alpha_3-\alpha_1)=(\alpha_2+\alpha_3)-2\alpha_1=?$

$X=k\xi+\alpha_1$

(2) $\xi=(\alpha_3-\alpha_1)=(\alpha_3+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_1)$

$X=k\xi+\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$

9.解: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$ $B\ne 0 \Rightarrow r(B)\ge 1$.

$AB=0 \Rightarrow r(A)+r(B)\le 3 \Rightarrow r(A)\le 2$

又$\because r(A)\ge 2 \Rightarrow r(A)<3 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow \lambda=?$

$\because r(A)+r(B)\le 3$ 且 $r(A)=2$ $\therefore r(B)=1<3$.

$\therefore |B|=0$.

题型三 含参方程组解讨论.

P105 例3解: 由 $4-r(A)=2 \Rightarrow r(A)=2$.

$A\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & t & t\\ 0 & t-2 & -1 & -1\end{pmatrix}$

由 $\frac{1}{t-2}=\frac{t}{-1}=\frac{t}{-1} \Rightarrow t=1$.

$A\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$X=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Date /

4. 解: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & a-3 & 5\\ -1 & 1 & 4-a\\ a & -a & 2a+3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & a-1 & 1\\ 0 & 0 & 6-a\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & a-1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\because r(A)<3$, $\therefore a=1$.

$A\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $X=k\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

例5. 解: $A=\begin{pmatrix}1+a & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & \cdots & 2\\ n & n & & n+a\end{pmatrix}$

$|A|=(a+1+2+\cdots+n)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & a\end{vmatrix}=a^{n-1}(a+1+2+\cdots+n)$

由 $r(A)<n\Rightarrow |A|=0\Rightarrow a=0$ 或 $a=-(1+2+\cdots+n)$.

Case 1. $a=0$.

$A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ & O & & \end{pmatrix}$ $X=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+k_{n-1}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

Case 2. $a=-(1+2+\cdots+n)$.

$A=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \cdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2a & a & 0 & \cdots & 0\\ -3a & 0 & a & \cdots & 0\\ \cdots\\ -na & 0 & 0 & \cdots & a\end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -3 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ -n & 0 & & \cdots & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -3 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$

deli得力

Date. /

$r(A)=n-1 \qquad X=k\begin{pmatrix}1\\2\\3\\ \vdots\\ n\end{pmatrix}$

6. 解:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b\\ b & a & b & \cdots & b\\ \cdots & & & & \\ b & b & b & \cdots & a\end{pmatrix}$$

$$|A|=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

$AX=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow a\neq b$ 且 $a\neq(1-n)b$.

$a=b$ 或 $a=(1-n)b$ 时 $AX=0$ 有无数解.

Case 1. $a=b$. $A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ & O & & \vdots\end{pmatrix}$.

$$X=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+k_{n-1}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$$

Case 2. $a=(1-n)b$.

$$A\to\begin{pmatrix}1-n & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1\\ \cdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1-n & 1 & 1 & \cdots & 1\\ n & -n & 0 & \cdots & 0\\ n & 0 & -n & \cdots & 0\\ \cdots & & & & \\ n & 0 & 0 & \cdots & -n\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1-n & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & & & & \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & & & & \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$r(A)=n-1<n \qquad \therefore X=k\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$.

P_{109} 例3. 解.

法一: $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & a+2\\ 1 & a & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & a\\ 0 & a-2 & -3\end{vmatrix}=-(a+1)(a-3)$.

Date. /

① $|A| \neq 0$，即 $a \neq -1$ 且 $a \neq 3$ 时，唯一解。

$x_1 = \frac{D_1}{|A|}$，$x_2 = \frac{D_2}{|A|}$，$x_3 = \frac{D_3}{|A|}$.

② $a=-1$ 时.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$r(A) \neq r(\bar{A})$，∴ $a=-1$ 时方程组无解

③ $a=3$ 时 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to$

法二：

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & -1 \\ 0 & 0 & (a+1)(a-3) & a-2 \end{pmatrix}$$

P112 例6.解.

P114 例9.解.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{pmatrix}$$

$r(A) = r(\bar{A}) < 4$.

<1>

P116 例11.

P117 例13

题型六 公共解与同解.

一. 公共解.　$AX=b$　(I)

$BX=c$　(II).

① $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ 的解即为(I)、(II)公共解.

Date. /

② 求(I)解. 代入(II)

③ 求(I)(II)通解. 令相等

二、同解.

$$AX=0 \quad (I)$$
$$BX=0 \quad (II)$$

Th. (I). (II) 同解 $\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$ $r(A)=r(B)$.

P_{123} 例2.

P_{124} 例3.

P_{125} 例6.

解: 令 $\bar{C}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$

第五章 特征值与特征向量

Date. /

一、defs

1. $A_{n\times n}$. If $\exists\lambda$(数). $\exists\alpha(\neq 0)$. 使 $A\alpha=\lambda\alpha$ — λ对应特征向量.
   特征值

Q1. $\lambda=?$

Q2. λ_0为特征值. $\alpha=?$

$A\alpha=\lambda\alpha\ (\alpha\neq 0)$

$\Updownarrow$

$(\lambda E-A)\alpha=0$

$\because \alpha\neq 0 \quad \therefore r(\lambda E-A)<n$.

2. $|\lambda E-A|=0$.
   $|\lambda E-A|$ —— 特征多项式.

Notes:

① A特征值, 即 $|\lambda E-A|=0$ 的解;

② λ不一定实

如: $A=\begin{pmatrix}2&-2\\1&0\end{pmatrix}$

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2\\-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+2=0$.

$\lambda_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=1\pm i$

③ λ_0为特征值, 求特征向量 即 $(\lambda_0E-A)X=0$ 非零解.

(坐标, 同型矩阵转换)

3. 相似 —— A, B为n阶矩阵 If $\exists$可逆阵P, 使 $P^{-1}AP=B$.

Notes:

① $A\sim B \underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} r(A)=r(B)$

② $A\sim B \underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} |\lambda E-A|=|\lambda E-B|$.

Date. /

"$\Rightarrow$" $P^{-1}AP=B$.

$|\lambda E-B|=|\lambda P^{-1}P-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda E-A)P|$

$=|P^{-1}|\cdot|\lambda E-A|\cdot|P|=|\lambda E-A|$

"$\not\Leftarrow$" $A=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=\lambda^2(\lambda-1)$

$\because r(A)=1\neq r(B)=2 \quad \therefore A\not\sim B$.

③ $A\sim B\Rightarrow\begin{cases}tr(A)=tr(B)\\|A|=|B|\end{cases}$

④ $A\sim B\Rightarrow\begin{cases}A^T\sim B^T & (P\text{不同})\\ f(A)\sim f(B) & (P\text{同})\end{cases}$

$P^{-1}AP=B\Rightarrow P^TA^T(P^T)^{-1}=B^T\Rightarrow[(P^T)^{-1}]^{-1}A^T(P^T)^{-1}=B^T$

$f(x)=x^2+2 \quad f(A)=A^2+2E$.

$P^{-1}f(A)P=P^{-1}A^2P+2E=P^{-1}AP\cdot P^{-1}AP+2E=B^2+2E=f(B)$

若 A,B 可逆，则 $\begin{cases}A^{-1}\sim B^{-1} & (P\text{同})\\ A^*\sim B^* & (P\text{同})\end{cases}$

$P^{-1}AP=B\Rightarrow P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}$

$\because A\sim B \quad \therefore |A|=|B|$

$\therefore P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}\Rightarrow P^{-1}|A|A^{-1}P=|B|B^{-1}$

$\therefore P^{-1}A^*P=B^*$

A,B 可逆，相似，以下不对（ ）

(A) $A^T\sim B^T$ ✓；(B) $A^{-1}\sim B^{-1}$ ✓

(C) $A+A^{-1}\sim B+B^{-1}$；(D) $A+A^T\sim B+B^T$ ✗

$\begin{cases}P^{-1}AP=B\\P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}\end{cases}\Rightarrow P^{-1}(A+A^{-1})P=B+B^{-1}$

二. 性质.

(一) 一般:

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$(\lambda_1 E - A)X = 0 \Rightarrow \alpha_1, \cdots, \alpha_m$.

$(\lambda_2 E - A)X = 0 \Rightarrow \beta_1, \cdots, \beta_s$.

$\Rightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_m, \beta_1 \cdots \beta_s$ 线性无关.

2. $\lambda_1 \neq \lambda_2$. $A\alpha = \lambda_1 \alpha$, $A\beta = \lambda_2 \beta$.

$\Rightarrow \alpha + \beta$ 不是特征向量

证: (反) 设 $A(\alpha+\beta) = \lambda_3(\alpha+\beta)$.

$\Rightarrow \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta = \lambda_3\alpha + \lambda_3\beta \Rightarrow (\lambda_1-\lambda_3)\alpha + (\lambda_2-\lambda_3)\beta = 0$.

$\because \alpha, \beta$ 线性无关. $\therefore \lambda_1 = \lambda_3, \lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ 矛盾

3. $A\alpha = \lambda_0 \alpha$. 则

① $f(A)\alpha = f(\lambda_0)\alpha$;

② 若 A 可逆. $\begin{cases} A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda_0}\alpha \\ A^*\alpha = \frac{|A|}{\lambda_0}\alpha \end{cases}$

Note: A, A^{-1}, A^* 特征向量公用.

4. A 可相似对角化. $\Leftrightarrow A \exists n$ 个线性无关特征向量

Q1. $A\alpha = \lambda_0 \alpha \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f(A)\alpha = f(\lambda_0)\alpha$.

反例: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f(x) = x^2$.

$f(A) = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

$f(A)\alpha = f(0)\alpha$.

但 $A\alpha \neq 0\alpha$

$\because A\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $0\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Date. /

Q2. A可逆. $A\alpha=\lambda_0\alpha \Rightarrow \begin{cases} A^{-1}\alpha=\frac{1}{\lambda_0}\alpha \\ A^*\alpha=\frac{|A|}{\lambda_0}\alpha. \end{cases}$ ✓.

$A\alpha=\lambda_0\alpha$, $P^{-1}AP=B$ 即 $A\sim B$.

$\underline{B\beta=\lambda_0\beta}$, $\beta=?$

$A\alpha=\lambda_0\alpha \Rightarrow \underline{P^{-1}AP}\cdot P^{-1}\alpha=\lambda_0 P^{-1}\alpha$

$\therefore B P^{-1}\alpha=\lambda_0 P^{-1}\alpha$,

$\therefore \beta=\underline{P^{-1}\alpha}$

Q3. $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

$r(A)=n \Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow \lambda_1\neq 0, \cdots, \lambda_n\neq 0$ ✓.

设 $\lambda_1\cdots\lambda_r\neq 0$, $\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0 \overset{?}{\Rightarrow} r(A)=r$ ✗

反例: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=0$, $r(A)=2\neq 1$.

$\lambda_1\cdots\lambda_r\neq 0$, $\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$. 且A可对角化.

则 $r(A)=r$. ✓

证: ∵ A可对角化

∴ ∃ 可逆阵 P 使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$

∴ $r(A)=r$.

Q4. If ∃可逆阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$. $A\sim B$.

如何判断 $A\sim B$

1° $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$ (necessary condition.

2° Case 1. A, B 可对角化 $\Rightarrow A\sim B$

证: $|\lambda E-A|=|\lambda E-B| \Rightarrow$ A, B 特征值同, 设 $\lambda_1\cdots\lambda_n$

Date.　　/

$\because$ A、B可对角化. $\therefore$ ∃可逆阵 P_1, P_2 使 $P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

$P_2^{-1}BP_2=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2 \Rightarrow (P_1P_2^{-1})^{-1}AP_1P_2^{-1}=B$.

令 $P=P_1P_2^{-1} \Rightarrow P^{-1}AP=B$.

例1. $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

求P, 使 $P^{-1}AP=B$.

解: $|\lambda E-A|=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

$\lambda=-1$ 代入 $(\lambda E-A)X=0$

$E+A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

$\lambda=1$ 代入 $(\lambda E-A)X=0$.

$E-A\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$P_1=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. $P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$;

$|\lambda E-B|=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=-1$ $\lambda_2=\lambda_3=1$

$\lambda=-1$ 代入 $(\lambda E-B)X=0$

$E+B\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$,

$\lambda=1$ 代入 λ. $(\lambda E-B)X=0$.

$E-B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&1&-1\\&0&\end{pmatrix}$ $\beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\beta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Date. /

$$P_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\qquad P_2^{-1}BP_2=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

$$P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2 \implies P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}=B.$$

$$\implies (P_1P_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1})=B \qquad P=P_1P_2^{-1}$$

Case 2. A可对角化, B不可对角化. $A \nsim B$

?. Case 3. A不可对, B不可 $A \overset{?}{\sim} B$.

Q5. A 3×3. $\lambda_1=\lambda_2=1$ $\Downarrow$ α_1,α_2, $\lambda_3=2$ $\Downarrow$ α_3.

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\qquad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$$

① $P_1=(\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_1+2\alpha_2,\ 4\alpha_3)$.

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}?$$

$\alpha_1,\alpha_2 \xrightarrow{\text{来自}} (E-A)x=0$

换汤不换药

$A\alpha_1=\alpha_1$

$A\alpha_2=\alpha_2$

$A(\alpha_1-\alpha_2)=1(\alpha_1-\alpha_2)$

② $P_2=(\alpha_1-\alpha_3,\ \alpha_2+2\alpha_3,\ \alpha_3)$

$$P_2^{-1}AP_2=\begin{pmatrix}&&\\&&\\&&\end{pmatrix}?$$

$$P_2=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

$$P_2^{-1}AP_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}^{-1}\underbrace{P^{-1}AP}_{\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

三 矩阵对角化过程.

(一) $A^T \neq A$.

$1°$. $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$;

$2°$ $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$, $\begin{cases} m \leq n \\ \text{线性无关} \end{cases}$.

$3°$ ① If $m < n \Rightarrow A$ 不可对角化.

② If $m = n \Rightarrow A$ 可对角化.

由 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, \cdots A\alpha_n = \lambda_n\alpha_n$.

$$A(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

令 $P = (\alpha_1, \cdots \alpha_n)$ 可逆.

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

专题: 正交.

(一) 向量正交.

1. def — If $(\alpha, \beta) = 0$. $\alpha \perp \beta$.

2. 性质: $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ $\begin{cases} \text{非零} \\ \text{两两正交} \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性无关. $\not\Leftarrow$

3. 正交化.

前提: $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ 线性无关.

$1°$ 正交化.

$\beta_1 = \alpha_1$;

$\beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$;

$\beta_3 = \alpha_3 - \dfrac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \dfrac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$;

$\cdots$

$\beta_n = \alpha_n - \dfrac{(\alpha_n, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \cdots - \dfrac{(\alpha_n, \beta_{n-1})}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})}\beta_{n-1}$

$\Rightarrow \beta_1, \cdots, \beta_n$ 两两正交.

Date.　　/

2° 规范化：

$$\gamma_1 = \frac{1}{|\beta_1|}\beta_1, \cdots, \gamma_n = \frac{1}{|\beta_n|}\beta_n.$$

$\Rightarrow \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 两两正交且规范.

(二) 正交阵：

1. def — $Q_{n\times n}$. If $Q^TQ=E$. ~

2. 判别法：

Th. $Q_{n\times n}=(\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$. $Q^TQ=E \Leftrightarrow \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 两两正交且规范.

证：
$$Q^TQ=\begin{pmatrix}\gamma_1^T\\ \vdots \\ \gamma_n^T\end{pmatrix}(\gamma_1\cdots\gamma_n)=\begin{pmatrix}\gamma_1^T\gamma_1 & \cdots & \gamma_1^T\gamma_n\\ \cdots & & \\ \gamma_n^T\gamma_1 & \cdots & \gamma_n^T\gamma_n\end{pmatrix}=E$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\gamma_1^T\gamma_1=\cdots=\gamma_n^T\gamma_n=1\\ \gamma_i^T\gamma_j=0 \ (i\neq j)\end{cases}$$

即 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 两两正交且规范.

3. 性质：

① $A^TA=E \Rightarrow A^T=A^{-1}$

② $A^TA=E \Rightarrow |A|=\pm1$

例1. $A^TA=E$ 　$|A|<0$. 　$|E+A|=?$

解：法一.

$$A^TA=E \Rightarrow |A|=\pm1 \quad |A|<0 \Rightarrow |A|=-1$$

$$|E+A|=|A^TA+A|=-|A^T+E|=-|(E+A)^T|=-|E+A|$$

$\therefore |E+A|=0$

法二. 令 $AX=\lambda X \Rightarrow X^TA^T=\lambda X^T$

$\Rightarrow X^T\underline{A^T\cdot A}X=\lambda X^TAX$

$\Rightarrow (\lambda^2-1)X^TX=0.$

$\because X^TX=|X|^2>0$, $\therefore \lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda=\pm1.$

$\because |A|<0$, $\therefore \lambda=-1$ 一定为特征值

$\therefore E+A$ 一定有特征值 0.

$\therefore |E+A|=0$

③ $A^TA=E \Rightarrow \lambda=\pm 1$；

④ $Q^TQ=E$，$X=QY$，则 $|X|=|Y|$　（正交变换）

证：$|X|^2=X^TX=Y^TQ^TQY=Y^TY=|Y|^2$

$\Rightarrow |X|=|Y|$

（二）$A^T=A$；

1° $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$；

2° $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$；

3° Case1. 找可逆阵 P.

令 $P=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$.

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

1. $A^T=A \Rightarrow \lambda_i\in R\ (1\le i\le n)$.

2. $A^T=A$，$\lambda_1\neq\lambda_2$.

$A\alpha=\lambda_1\alpha$，$A\beta=\lambda_2\beta \Rightarrow \alpha\perp\beta$.

证：$A\alpha=\lambda_1\alpha \Rightarrow \alpha^TA=\lambda_1\alpha^T$

$\Rightarrow \alpha^T\underline{A\beta}=\lambda_1\alpha^T\beta$

$\Rightarrow (\lambda_2-\lambda_1)\alpha^T\beta=0$.

$\because \lambda_1\neq\lambda_2$　$\therefore \alpha^T\beta=0$ 即 $\alpha\perp\beta$.

3. $A^T=A$，A 一定可对角化.

Case2. 找正交阵 Q

$\alpha_1\cdots\alpha_n \xrightarrow[\text{规范化}]{\text{正交化}} \gamma_1\cdots\gamma_n$.

（正交化在同一 λ 内，不同 λ 本来就正交，且不同 λ 对应的 α 加减不是特征向量）

$(A\gamma_1=\lambda_1\gamma_1,\ \cdots,\ A\gamma_n=\lambda_n\gamma_n)$.

$A\underbrace{(\gamma_1\cdots\gamma_n)}_{=Q}=(\gamma_1\cdots\gamma_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$Q^TQ=E$.　$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

题型一　矩阵对角化判断

$A^T\overset{?}{=}A$

If $A^T\neq A \Rightarrow \lambda_1\cdots\lambda_n$

① $\lambda_1\cdots\lambda_n$ 单值，A 可 $\cdots$

② 每个特征值重数与其无关向量个数同.

③ 有 n 个线性无关特征向量.

Date. /

1. $A \neq 0$, $A^m = 0$, 证: A不可对角化.

证: 令 $AX = \lambda X \Rightarrow A^m X = \lambda^m X = 0$

$\because X \neq 0$, $\therefore \lambda^m = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

$\because r(0E - A) = r(A) \geq 1$

$\therefore n - r(0E - A) \leq n-1$

$\therefore$ A不可对角化.

2. $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix} \neq 0$. $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \neq 0$. $A = \alpha \beta^T$.

① If $(\alpha, \beta) = 4$. 证: A可对角化

② If $(\alpha, \beta) = 0$. 证: A不可对角化.

证: ① $A^2 = 4A \Rightarrow A^2 - 4A = 0$.

令 $AX = \lambda X$

由 $(A^2 - 4A)X = (\lambda^2 - 4\lambda)X = 0$.

$\because X \neq 0$, $\therefore \lambda^2 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ 或 $\lambda = 4$

$\because tr(A) = (\alpha, \beta) = 4 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

$\therefore \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$, $\lambda_n = 4$.

$r(0E - A) = r(A) = r(\alpha\beta^T) \leq r(\alpha) = 1$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \cdots b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_n \\ & \cdots & \\ a_n b_1 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}.$$

$\because \alpha \neq 0, \beta \neq 0$. $\therefore A \neq 0$. $\Rightarrow r(A) \geq 1$

$\therefore r(0E - A) = 1$.

$\therefore$ 可对角化.

(2) If $(\alpha, \beta) = 0$. $A^2 = 0$.

令 $AX = \lambda X \Rightarrow A^2 X = \lambda^2 X = 0$.

$\because X \neq 0$ $\therefore \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdots = \lambda_n = 0$,

$\because r(0E-A)=1$.

$\therefore A$ 不可对角化

3. $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ 单位且正交. $A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$

① 证: $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ 为特征向量　② 证 A 可对角化.

证: ① $A(\alpha+\beta)=(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T)(\alpha+\beta)=\alpha+\beta$.

$\Rightarrow \alpha+\beta$ 为 A 的属于 $\lambda_1=1$ 的特征向量

$A(\alpha-\beta)=(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T)(\alpha-\beta)=-\alpha+\beta=-(\alpha-\beta)$

$\Rightarrow \alpha-\beta$ 为 A 的属于 $\lambda_2=-1$ 的特征向量.

② 法一: $\because A^T=(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T)^T=\beta\alpha^T+\alpha\beta^T=A$.

$\therefore A$ 可对角化.

法二: $r(A)\le r(\alpha\beta^T)+r(\beta\alpha^T)\le r(\alpha)+r(\beta)=2<3$.

$\Rightarrow |A|=0$. $\Rightarrow \lambda_3=0$

$\because \lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$ $\lambda_3=0$ 两两不等.

$\therefore A$ 可对角化.

4. $A_{n\times n}$, $A^2-A-2E=0$　证: A 可对角化.

证: 令 $AX=\lambda X$

$(A^2-A-2E)X=(\lambda^2-\lambda-2)X=0$

$\because X\ne 0$ $\therefore \lambda^2-\lambda-2=0$ $\Rightarrow \lambda=-1$ 或 $\lambda=2$.

$(A+E)(A-2E)=0 \Rightarrow (E+A)(2E-A)=0$.

$\Rightarrow r(E+A)+r(2E-A)\le n$.

$r(E+A)+r(2E-A)\ge r(3E)=n$.

$\therefore r(E+A)+r(2E-A)=n$.

$\lambda=-1$ 对应线性无关特征向量个数

$n-r(-E-A)=n-r(E+A)$ 个;

$\lambda=2$ 时对应线性无关特征向量个数

$n-r(2E-A)$ 个.

$\because n-r(E+A)+n-r(2E-A)=n$.

$\therefore A$ 可对角化.

Date. /

P156 例11. 解:

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & 2 & \lambda-5\end{vmatrix} \overset{r_3+r_2}{=} \begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a-3 & 3\\ 1 & \lambda-7 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+a+10).$$

Case 1. $\lambda_1=\lambda_2=2\neq\lambda_3$.

由 $4-16+a+10=0 \Rightarrow a=2$, $\lambda_3=6$.

$$2E-A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ & 0 & \\ & & \end{pmatrix}$$

$\because r(2E-A)=1$, $\therefore A$ 可对角化.

Case 2. $\lambda_1=2\neq\lambda_2=\lambda_3$.

$\Delta=64-4(a+10)=0 \Rightarrow a=6$. $\lambda_2=\lambda_3=4$.

$$4E-A=\begin{pmatrix}3 & -6 & 3\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\because r(4E-A)=2\neq 1$.

$\therefore A$ 不可对角化.

P153 例3. 解.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ -x & \lambda-1 & -y\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0.$$

$\Rightarrow \lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

$\because A$ 可对角化, $\therefore r(E-A)=1$.

而 $E-A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -x & 0 & -y\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -x-y\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\therefore x+y=0$.

题二 相似

1° $|\lambda E-A| \overset{?}{=} |\lambda E-B|$

2° ① A, B 可对角化 $\Rightarrow A\sim B$

例1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$.

证. $A\sim B$.

证: $|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ & \cdots & & \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$

$= \lambda^{n-1}(\lambda-n)=0 \Rightarrow \lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\ \lambda_n=n$.

$|\lambda E-B| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda-n \end{vmatrix} = \lambda^{n-1}(\lambda-n)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0.\ \lambda_n=n$.

$\because A^T=A$, $\therefore$ A 可对角化.

~~$0E-B=$~~.

$\because r(0E-B)=r(B)=1$.

$\therefore$ B 可对角化.

$\therefore A\sim B$.

② A 可对角化. B 不可

例2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A\overset{?}{\sim}B$

解: $|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$

$\Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=1$.

$|\lambda E-B| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$

$\Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=1$

Date.　　/

$$E-A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\because r(E-A)=2$　　$\therefore A$不可对角化.

$\because B^T=B$　　$\therefore B$可对角化.

$\therefore A \not\sim B$.

③ A不可　B不可

例3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

解: A,B,C特征值 $1,1,1$.

$E-A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　$r(E-A)=2$.

$E-B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　$r(E-B)=1$

$E-C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　$r(E-C)=1$.

秩相等

$B\sim C$.　$A\not\sim B$　$A\not\sim C$.

~~$A\sim B$~~.

$A\sim B$, 求P,　$P^{-1}AP=B$.

1°. $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \lambda_1, \cdots, \lambda_n$;

$(\lambda_i E-A)X=0 \Rightarrow \alpha_1, \cdots, \alpha_n$;

$P_1=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$.　$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

2°. $|\lambda E-B|=0 \Rightarrow \lambda_1, \cdots, \lambda_n$;

$(\lambda_i E-B)B=0 \Rightarrow \beta_1, \cdots, \beta_n$;

$P_2=(\beta_1, \cdots, \beta_n) \quad P_2^{-1}BP_2=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2 \Rightarrow P^{-1}AP=B$ 其 $P=P_1P_2^{-1}$

型三. λ求法.

① $|\lambda E-A|=0$.

② 定义法. $AX=\lambda X$. $\begin{pmatrix} f(A)=0. \\ AB=C \end{pmatrix}$

③ 关联法: $\begin{cases} A, A^{-1}, A^* \\ P^{-1}AP=B, 即 A\sim B. \end{cases}$

例1. $A_{3\times3}$. $A^T=A$. $r(A)=2$. $A^2-2A=0$.

求 $|A+3E|=?$

解: 令 $AX=\lambda X$, $(A^2-2A)X=(\lambda^2-2\lambda)X=0$.

$\because X\neq0 \quad \therefore \lambda^2-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0$ 或 $\lambda=2$.

$\because r(A)=2$ 且 $A^T=A$. $\therefore \lambda_1=0, \lambda_2=\lambda_3=2$.

$|A+3E|=3\times5\times5$.

例2. $A_{3\times3}$ $A^T=A$. $A\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r(A)<3$

求A.

解: $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1=-1, \alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_2=2, \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\because r(A)<3$, $\therefore \lambda_3=0$.

设 $\alpha_3=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 为 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量

Date. /

$\because A^T=A$.

$\therefore \begin{cases}\alpha_1^T\alpha_3=0\\ \alpha_2^T\alpha_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x_1+x_2=0\\ x_1+x_2=0\end{cases} \Rightarrow \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

令 $P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad A=P\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{pmatrix}P^{-1}$

例3. $A_{3\times3}$. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

$A\alpha_1=\alpha_1-\alpha_2$, $\quad A\alpha_2=\alpha_1+2\alpha_2 \quad A\alpha_3=\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3$

问A可否对角化？

解：

$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆

$AP=P\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP=B.\ A\sim B.$

$|\lambda E-B|=0 \Rightarrow ?$

例4. $A_{2\times2}$. $\alpha\neq0$. α不是A的特征向量.

$A^2\alpha-A\alpha-6\alpha=0$.

①证：$\alpha, A\alpha$ 线性无关；②证A可对角化.

证：① 法一：若 $\alpha, A\alpha$ 线性相关. $\Rightarrow$ 成比例

$\alpha=kA\alpha$ 或 $A\alpha=l\alpha$

If $\alpha=kA\alpha$. $k\neq0$. $\because \alpha\neq0$. $\therefore A\alpha=\frac{1}{k}\alpha$. 矛盾.

If $A\alpha=l\alpha$. 矛盾.

$\therefore \alpha, A\alpha$ 线性无关

法二. 设 $\alpha, A\alpha$ 线性相关. ∃不全为0的 k_1,k_2 使

$k_1\alpha+k_2A\alpha=0$

If $k_2=0 \Rightarrow k_1\alpha=0 \Rightarrow k_1=0$. 矛盾 $\quad k_2\neq0$

$\therefore k_2\neq0 \Rightarrow A\alpha=-\frac{k_1}{k_2}\alpha$. 矛盾.

∴ $\alpha, A\alpha$ 线性无关.

② $P=(\alpha, A\alpha)$ 可逆.

$$AP=(A\alpha, A^2\alpha)=(A\alpha, 6\alpha+A\alpha)=P\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & 1\end{pmatrix}=B. \quad A\sim B.$$

∵ $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda & -6\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-6=0.$

∴ A 特征值. $\lambda_1=-2\neq\lambda_2=3$

∴ A 可对角化.

题型四. 求矩阵

① 化简 $AX=B$. A可逆. $X=A^{-1}B$;

② 化简 $AX=B$. A不可逆或A不方.

如: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$. $AX=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ 求X.

设 $X=(X_1, X_2)$. $B=(b_1, b_2)$.

$AX=B \iff AX_1=b_1,\ AX_2=b_2.$

③ $A_{n\times n}$. $\begin{cases}\lambda_1 \cdots \lambda_n\\ \alpha_1 \cdots \alpha_n\end{cases}$ $P=(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$.

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \Rightarrow A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$$

P165. 例3. 解.

设 $\lambda_1=6$ 特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$.

∵ $A^T=A$, ∴ $\begin{cases}\xi_1^T\xi_2=0\\ \xi_1^T\xi_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x_1+x_3=0\\ x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$ $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

Date. /

$P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $A=P\begin{pmatrix}6 & & \\ & 3 & \\ & & 3\end{pmatrix}P^{-1}$.

例5. 解：<1> ∵ $A^T=A$. ∴ $|+a+1=0 \Rightarrow a=-2$

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

令 $\lambda_2=\lambda_3$ 对应特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

∵ $A^T=A$. ∴ $\alpha_1^T\alpha=0$. $\Rightarrow x_1-2x_2+x_3=0$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

(2) $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $A=P\begin{pmatrix}8 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}P^{-1}$

型五. 性质

P144 例10. 解：

(笨)法一. $|A|=7\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=7$.

$\begin{cases}M_{11}=5, & A_{11}=5\\ M_{12}=2, & A_{12}=-2\\ M_{13}=-2 & A_{13}=-2\end{cases}$ $\begin{cases}M_{21}=2, & A_{21}=-2\\ M_{22}=5, & A_{22}=5\\ M_{23}=2, & A_{23}=-2.\end{cases}$ ∴ $A^*=\begin{pmatrix}5 & -2 & -2\\ -2 & 5 & -2\\ -2 & -2 & 5\end{pmatrix}$

$B=P^{-1}A^*P=?$

$B+2E=?$

法二：1° $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-3 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-7)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)^2(\lambda-7)=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=7$.

$\lambda=1$ 代入 $(\lambda E-A)X=0$

$E-A\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ & 0 & \end{pmatrix}$ $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=7$代入$(\lambda E-A)X=0$.

$$7E-A\rightarrow\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&\cancel{-2}&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;

2° $|A|=7$. A^*特征值 7,7,1.

对应线性无关特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;

3° $\because P^{-1}A^*P=B$.

$\therefore B$特征值 7 7 1.

对应线性无关特征向量 $\beta_1=P^{-1}\alpha_1$, $\beta_2=P^{-1}\alpha_2$, $\beta_3=P^{-1}\alpha_3$.

4° $B+2E$特征值. 9, 9, 3.

对应线性无关特征向量为 β_1, β_2, β_3.

$A_{3\times3}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. A三个特征值单.

$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$, 证 $r(A)=2$.

证: $\because A$特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$单.

$\therefore A$可对角化.

$\exists P$(可逆) $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$.

$\therefore r(A)\geq2$.

又 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$. $\therefore r(A)\leq2\Rightarrow r(A)=2$.

$tr(A)=4$.

如: $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&b&1\\1&a&-2\end{pmatrix}$ $\alpha\neq0$. $A\alpha=2\alpha$. $\cancel{|A|=2}$.

求 a,b.

解: $tr(A)=b-1=4$ $\Rightarrow b=5$.

Date. /

$\because A\alpha=2\alpha$. $\therefore \lambda_1=2$.

$\therefore |2E-A|=0$.

P146. 例4. 解:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 6 & x & -6 \\ y & -9 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda=?,\ x=?,\ y=?$$

$\mu=\frac{1}{\lambda}$.

第六章. 二次型.

一. defs.

1. $f=X^TAX$ $\begin{cases} 标 \Longleftrightarrow A=\begin{pmatrix} \cdot & & \\ & \ddots & \\ & & \cdot \end{pmatrix} \\ 非标 \Longleftrightarrow A^T=A \text{ 但A不对角} \end{cases}$

2. 矩阵合同 — A、B为n阶阵. 若存在可逆阵P.
   使 $P^TAP=B$. 称A, B合同, 记 $A\cong B$.

3. 标准化 — $f=X^TAX \xrightarrow[(P可逆)]{X=PY} Y^T\underline{(P^TAP)}Y$.

   If $P^TAP=\begin{pmatrix} l_1 & & \\ & \ddots & \\ & & l_n \end{pmatrix}$

   $f=l_1y_1^2+\cdots+l_ny_n^2$.

Note: 标准化底线. $\begin{cases} X=PY.\ P可逆. \\ P^TAP=\begin{pmatrix} l_1 & & \\ & \ddots & \\ & & l_n \end{pmatrix}. \end{cases}$

二、标准化理论.

(一) 配方法:

例1. 用配方法化 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_1x_2-2x_2x_3-4x_3^2$. 为标准二次型.

解: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -4\end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$. $f=X^TAX$

$f=(x_1+x_2)^2-(x_2+x_3)^2-3x_3^2$.

令 $\begin{cases}x_1+x_2=y_1\\ x_2+x_3=y_2\\ x_3=y_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=y_1-y_2+y_3\\ x_2=y_2-y_3\\ x_3=y_3\end{cases}$ 即 $X=PY$. $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

$f \xlongequal{X=PY} Y^T(P^TAP)Y = y_1^2-y_2^2-3y_3^2$

例. 用配方法 化 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3-5x_3^2$. 为标准型.

解: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -5\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ $f=X^TAX$

$f=(x_1+x_2-x_3)^2-x_2^2+x_2x_3-x_3^2-5x_3^2$.
$=(x_1+x_2-x_3)^2-(x_2-x_3)^2-5x_3^2$.

令 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=y_1\\ x_2-x_3=y_2\\ x_3=y_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=y_1-y_2\\ x_2=y_2+y_3\\ x_3=y_3\end{cases}$ 即 $X=PY$, $P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 可逆

$f \xlongequal{X=PY} Y^T(P^TAP)Y=y_1^2-y_2^2-5y_3^2$.

例3. 用配方法 化 $f(x_1, x_2)=x_1x_2$ 为标准型.

解: $A=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ $f=X^TAX$;

令 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2\\ x_2=y_1+y_2\end{cases}$, 即 $X=PY$, $P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 可逆.

$f \xlongequal{X=PY} Y^T(P^TAP)Y=y_1^2-y_2^2$.

Date.　　/

Q. $\begin{cases} x_1 = y_1 - 4y_2 \\ x_2 = y_1 + 4y_2 \end{cases}$? ✓.

$X = PY$，$P = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ 可逆.

$f \xlongequal{X=PY} Y^T(P^TAP)Y = y_1^2 - 16y_2^2$ ✓.

Notes:

① 二次型有无数个标准型

② 标准型系数不一定是特征值.

③ 标准型不唯一，但标准型系数正负个数唯一.

(二) 正交变换法 化二次型为标准型.

1° $f = X^TAX$；$(A^T = A)$.

2° $|\lambda E - A| = 0 \Rightarrow \lambda_1, \cdots, \lambda_n$;

3° $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$;

4° $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \xrightarrow[\text{规范化}]{\text{正交化}} \gamma_1 \cdots \gamma_n$.

$(A\gamma_1 = \lambda_1\gamma_1, \cdots, A\gamma_n = \lambda_n\gamma_n)$.

$Q = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$. $Q^TQ = E$. $Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

5° $f \xlongequal{X=QY} Y^T(Q^TAQ)Y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

Note: 正交法标准型~~型~~系数一定是特征值.

三. 正定二次型.

(一) def — $f = X^TAX$. If $\forall X \neq 0$，有 $X^TAX > 0$.

X^TAX = 正定二次型. A — 正定矩阵.

(二) 判别法:

方法一：特征值法.

Th1. $A^T = A$，则 A 正定 $\Leftrightarrow \lambda_i > 0$ $(1 \le i \le n)$

方法二：定义法. $A^T = A$.

If $\forall X \neq 0$，有 $X^TAX > 0$.

推论：$A^T=A$．$B^T=B$．则 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 正定 $\Leftrightarrow$ A, B 正定．

方法三．顺序主子式法．

Th2．$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 且 $A^T=A$．则 A 正定 $\Leftrightarrow$

$a_{11}>0$，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0$，……，$|A|>0$．

专题：合同判断．

1°　$A^T=A$．$B^T=B$．

2°．$A\cong B \Leftrightarrow A, B$ 特征值正、负个数同．

如：$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$．$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$．

解：$A^T=A$　$B^T=B$．

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-2)=0$$

$\Rightarrow \lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$．

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-3)=0.$$

$\Rightarrow \lambda_1=1$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=-1$　$\therefore A\cong B$．

Note：若标准型系数为 ±1．又称为规范型．

如：$A_{3\times3}$，$A^T=A$．$\lambda_1=a-2$．$\lambda_2=a+1$，$\lambda_3=a+3$．

$f=X^TAX$ 的规范型为 $y_1^2-y_2^2$，求 $|A+2E|=$？

解　由 $\begin{cases} a-2<0 \\ a+1=0 \\ a+3>0 \end{cases} \Rightarrow a=-1 \Rightarrow \lambda_1=-3$．$\lambda_2=0$．$\lambda_3=2$

$|A+2E|=-1\times2\times4=-8$．

Date. /

题型一 正定判断

1. A正定，证A^{-1}正定.

证：A正定 $\Rightarrow \lambda_i>0$. $(1\le i\le n)$.

$\because A^{-1}$特征值 $\frac{1}{\lambda_1}>0$, $\frac{1}{\lambda_2}>0$ … , $\frac{1}{\lambda_n}>0$

$\therefore A^{-1}$正定.

2. A正定. 证. $\exists B$. 使$A=B^2$.

证. $A^T=A$. A正定 $\Rightarrow \lambda_1>0$, …, $\lambda_n>0$.

$\exists$正交阵Q.使 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \Rightarrow A=Q\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}Q^T$

$=Q\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}Q^TQ\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}Q^T$.

令$B=Q\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}Q^T$

$A=B^2$.

3. $A_{3\times3}$. $A^T=A$. $A^2+3A=0$. $r(A)=2$.

若$A+kE$正定. 求k范围.

解. 令 $AX=\lambda X$, $(A^2+3A)X=(\lambda^2+3\lambda)X=0$.

$\because X\ne0$. $\therefore \lambda^2+3\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-3$, 或 $\lambda=0$

$\because A^T=A$ 且 $r(A)=2$. $\therefore \lambda_1=\lambda_2=-3$, $\lambda_3=0$.

$A+kE$特征值 $k-3$, $k-3$, k.

$A+kE$正定 $\Rightarrow \begin{cases}k-3>0\\k-3>0\\k>0\end{cases} \Rightarrow k>3$.

4. $A_{m\times n}$. $r(A)=n$. $B=A^TA$, 证: B正定.

证. 1° $B^T=(A^TA)^T=A^TA=B$.

2° $\forall X\ne0$, $X^TBX=X^TA^TAX=(AX)^T(AX)$.

Date.　　/

$AX \neq 0$.

若 $AX=0$. $\because r(A)=n$, $\therefore$ $\therefore X=0$, 矛盾.

$\therefore AX \neq 0$.

$\therefore X^TBX=(AX)^T\cdot(AX)>0$.

$\therefore B$ 正定.

5. $A_{m\times m}$ 正定. $B_{m\times n}$ 且 $r(B)=n$. 证: $C=B^TAB$ 正定.

证: $1°$ $A^T=A$.

$C^T=B^TA^TB=B^TAB=C$

$2°$ $\forall X\neq 0$. $X^TCX=X^TB^TABX=(BX)^TA(BX)$

令 $BX=Y$. $X^TCX=Y^TAY$.

$Y\neq 0$.

若 $Y=0 \Rightarrow BX=0$. $\because r(B)=n$. $\therefore X=0$ 矛盾.

$\therefore Y\neq 0$. $\because A$ 正定 $\therefore Y^TAY>0$. 即 $X^TCX>0$.

题型三 合同

例1. 用正交变化 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 为标准型.

解: $1°$ $A=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$. $f=X^TAX$;

$2°$ $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&-2\\-2&\lambda&-2\\-2&-2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-4)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-2$, $\lambda_3=4$.

$3°$. $2E+A\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\ & \cancel{0} & \\ & & \end{pmatrix}$.

$\lambda_1=\lambda_2=-1$ 对应的线性无关特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$;

Date. /

$$4E-A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_3=4$ 对应线性无关特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

4°. $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix};$$

$$\beta_3=\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\quad \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\quad \gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

$$Q=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\quad Q^TQ=E,\ Q^TAQ=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & -2 & \\ & & 4\end{pmatrix}$$

5° $f=X^TAX \xrightarrow{X=QY} Y^T(Q^TAQ)Y=-2y_1^2-2y_2^2+4y_3^2.$

P186. 例1. 解: $A=\begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\quad f=X^TAX.$

<1> $\because r(A)=2<3$

$\therefore |A|=0. \Rightarrow (1-a)^2=(1+a)^2 \Rightarrow A=0$

(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $f=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2.$

$=(x_1+x_2)^2+2x_3^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases} \quad \therefore X=k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.$

Date. /

例2. 解：(1) $|3E-A|=0$.

(2). $P^T(A^TA)P$.

$B=A^TA$.

P188. 例3. 解. $A=\begin{pmatrix} 1 & \cancel{0}\,2 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $f=X^TAX$.

$\lambda_1=-3$, $\lambda_2=b$, $\lambda_3=3$.

(1). $tr(A)=1=-3+b+3 \Rightarrow b=1 \Rightarrow \lambda_1=-3$ $\lambda_2=1$ $\lambda_3=3$.

$|A|=-9$. $\Rightarrow$ $\cancel{x}$ $a=\pm2$.

(2). Case 1. $a=-2$ $b=1$.

Case 2. $a=2$ $b=1$.

例4. 解: $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$. $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $f=X^TAX$.

(1). $tr(A)=a=1$

$|A|=-12 \Rightarrow b=7$.

例5. 解: $\lambda_1=-1$ $\lambda_2=3$, $\lambda_3=b$.

$|A|=-9 \Rightarrow b=3$ $\therefore$ $\lambda_1=-1$ $\lambda_2=\lambda_3=3$.

$\lambda_1=-1$ 的无关特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

令 $\lambda=3$ 的特征向量 $\alpha=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\because A^T=A$ $\therefore$ $\alpha_1^T\alpha=0 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=0$.

$\alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆. $A=P\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$

deli得力